

# **Materialmodelle für ANSYS Pulvermetallurgie, zyklische Plastizität, Tresca**

Wilhelm Rust  
CAD-FEM GmbH, Geschäftsstelle Hannover

## **Zusammenfassung**

CAD-FEM hat in der letzten Zeit mehrere Materialgesetze für ANSYS programmiert. Das Gesetz für plastisch kompressible Materialien basiert auf einem erweiterten Drucker-Prager-Modell und eignet sich für die Simulation des Verpressens von Pulvermetall, aber auch für Dichtungsmaterialien und andere plastisch kompressible Materialien.

Bei zyklischer Plastizität, insbesondere mit Temperaturänderungen, kann es zu Ratcheting-Effekten kommen. Um diese abzubilden, aber auch um eine Überschätzung dieser Effekte in Temperaturzyklen zu vermeiden, wurde nach geeigneten Materialgesetzen gesucht. Die Ansätze nach Chaboche und Mroz wurden programmiert.

Eine neue europäische Vorschrift verlangt die Anwendung der Tresca'schen Fließbedingung.

## **Einleitung**

ANSYS bietet mit USERPL und anderen dem Benutzer zugänglichen Materialroutinen die Möglichkeit, eigene Materialgesetze zu programmieren und in das Programm einzufügen. CAD-FEM hat einige Anwenderwünsche aufgenommen und Stoffgesetze programmiert, um Sie als Zusatzsoftware zu ANSYS auf dem Markt anzubieten. Dieser Aufsatz schildert die grundlegenden Formeln, charakteristische Ergebnisse und Anwendungsbereiche.

## USERPL

USERPL ist eine FORTRAN-Subroutine, an die nach der Gleichungslösung elastische Dehnungen übergeben werden. Daraus werden Spannungen (sog. Trial-Spannungen) errechnet, die normalerweise nicht das Werkstoffgesetz erfüllen, weil sie oberhalb der bisherigen Fließgrenze liegen. Nun muß zweierlei programmiert werden: ein Verfahren, das dafür sorgt, daß alle Werkstoffgleichungen am Ende des Lastinkrementes erfüllt werden, und die Aufstellung des tangentialen Stoffensors, der Ableitung der Spannungen nach den (Gesamt-)dehnungen. Diese Tangentenmatrix ist nur dann symmetrisch, wenn eine assoziierte Fließregel verwendet wird, d.h. daß die Richtung der plastischen Dehnungsincremente  $\Delta \epsilon_i^{pl}$  aus der Ableitung der Fließbedingung  $F$  nach den Spannungskomponenten  $\sigma_i$  berechnet wird:

$$\Delta \epsilon_i^{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}$$

wobei  $\lambda$  ein noch zu bestimmender Multiplikator ist. Unsymmetrische Tangenten sind bisher nicht zugelassen, so daß bei Verwendung einer nicht assoziierten Fließregel keine exakte Tangente an das Programm zurückgegeben werden kann. Außer den elastischen Dehnungen erhält das Unterprogramm noch Zustandsvariable, nämlich die plastischen Dehnungen und weitere Größen, die von der Belastungsgeschichte abhängig sind. Alle diese Größen werden zur Erfüllung des Stoffgesetzes verändert und an das Programm zurückgegeben. Die Zustandsvariablen sind aber am Anfang von USERPL auf dem Wert aus dem letzten konvergierten Zustand. Außer den plastischen Dehnungen ist ihre Zahl auf 6\*Anzahl Spannungskomponenten beschränkt. Weitere definierbare Variablen beinhalten den Wert des letzten (i.d.R. nicht konvergierten) Iterationsschrittes, sind also nicht mit den vordefinierten vertauschbar.

Beides, die assoziierte Fließregel und die begrenzte Zahl von Zustandsvariablen geben dem Programmierer eine gewisse Richtung vor, wie man unten sehen wird.

### Zyklische Plastizität

Bei zyklischen Belastungen können u.U. in beiden Richtungen plastische Dehnungen auftreten. Diese können abklingen, bis schließlich nur noch elastisches Verhalten vorliegt (elastisches Einspielen), nach einigen Zyklen konstante Werte annehmen (plastisches Einspielen) oder sich immer weiter in eine Richtung verschieben (Ratcheting, nach "ratchet wheel", dem Klinkenrad z.B. beim Uhrwerk). Die Art des Verhaltens ist von wesentlicher Bedeutung für die Lebensdauer eines Bauteils.

Basis für die zyklischen Modelle ist die kinematische Verfestigung. Dabei wird die Zunahme der Spannung nach Überschreiten der ersten Fließgrenze  $\sigma_F$  durch eine Verschiebung  $\alpha$  (back stresses) der Fließfläche (alle Punkte im Hauptspannungsraum, bei denen Fließen eintritt) beschrieben, wodurch sich die Fließgrenze für eine gegenläufige Belastung in gleicher Richtung verschiebt, also betragsmäßig abnimmt. Bei isotroper Verfestigung hingegen wächst der Durchmesser der Fließfläche. Die Fließgrenze erhöht sich um einen Betrag  $R$ , der von einer skalaren Größe, i.d.R. der kumulierten plastischen Dehnung ( $\epsilon_{eq}^{pl}$ , EPEQ in ANSYS) abhängig ist. Die Fließbedingung lautet insgesamt:

$$F = \sigma_v(\sigma - \alpha) - \sigma_F - R = 0$$

wobei  $\sigma_v$  eine Vergleichsspannung (z.B. nach von Mises) ist. Die verschiedenen Modelle unterscheiden sich nun dadurch, wie die Verschiebung der Fließfläche mit den plastischen Dehnungen einhergeht. Das in ANSYS implementierte Besseling-Modell (MKIN) umgeht die Antwort auf diese Frage, indem das Verfestigungsverhalten durch eine Folge von parallel geschalteten Subvolumina mit ideal-plastischem Verhalten beschrieben wird. Mit kinematischer Verfestigung läßt sich der Bauschinger-Effekt abbilden.

Besondere Bedeutung erhält die Frage, wie sich  $\alpha$  bei einer Temperaturänderung verhält, weil Ratcheting-Phänomene davon abhängen.

## Chaboche

Basierend auf Ansätzen von Armstrong/Frederikson gibt Chaboche[1] eine Evolutiongleichung für  $\alpha$  an:

$$d\alpha_i = C_i \varepsilon^{pl} - \gamma_i \alpha_i d\varepsilon_{eq}^{pl}$$

Der Index i deutet an, daß die Verschiebung der Fließfläche aus mehreren Anteilen (bei der CAD-FEM-Implementierung sind es fünf) bestehen kann, wodurch sich ziemlich genaue Anpassungen an Meßkurven vornehmen lassen:

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

$C_i$  ist ein temperaturabhängiger Materialparameter (bis zu fünf Temperaturen), der bei  $m=1$  als die Anfangssteigung des  $\sigma$ - $\varepsilon^{pl}$ -Diagramms interpretiert werden kann.  $\gamma_i$  ist hier temperaturunabhängig,  $C_i/\gamma_i$  ist der Sättigungswert für den Anteil i.

Auch für den isotrop verfestigenden Anteil gilt eine Evolutionsgleichung:

$$dR_i = b_i(Q_i - R_i)d\varepsilon_{eq}^{pl}, \quad R = \sum_{i=1}^n R_i, \quad n \leq 5$$

Dabei ist  $b_i$  ein temperaturunabhängiger,  $Q_i$  ein temperaturabhängiger Materialparameter, der Sättigungswert für R. Da die äquivalente plastische Dehnung nur zunehmen kann, ist dieser Anteil unabhängig von der Richtung der plastischen Dehnungen.

Mit  $C=6 \cdot 10^4$ ,  $\gamma=C/21$ ,  $\sigma_F=25$ ,  $Q=100$ ,  $b=5$ ,  $E=1,6 \cdot 10^4$  erhält man in eineinhalb Zyklen einer einachsigen Beanspruchung die Spannungs-Dehnungs-Linie aus Bild 1.

Ohne den isotropen Anteil bekommt man bei mehreren Zyklen und Mittelspannung 0 einen kleinen Unterschied zwischen dem Endwert nach dem ersten Halbzyklus und demjenigen in den folgenden Zyklen, die danach deckungsgleich sind (Bild 2). Die Materialwerte sind hier bei Temperatur  $T=200$ , die später eine Rolle spielt,  $C_1=5,5 \cdot 10^4$ ,  $\gamma=700$ ,  $\sigma_F=144$ ,  $E=1,8 \cdot 10^5$  (keine isotrope Verfestigung). Bei Mittelspannung  $\neq 0$  (hier  $\sigma_{max}=215$ ,  $\sigma_{min}=-169$ ) erhält man je Zyklus eine Verschiebung der Hystereseschleife, eine einseitige Zunahme der plastischen Dehnungen - Ratcheting (Bild 3). Das ist insoweit richtig, als daß Ratchetingeffekte von der Mittelspannung abhängen. Das Chaboche-Modell kann also prinzipiell einen solchen Effekt abbilden, in diesem Beispiel ist er aber größer, als in Wirklichkeit zu erwarten. Mit der Wahl einer konstanten Endtangente durch  $C_2=1 \cdot 10^4$  und  $\gamma=0$ , kann man aber die Größe wesentlich verringern. Außerdem kommt es zum

Abklingen des Fortschreitens; es ist also plastisches Einspielen zu erwarten (Bild 3).

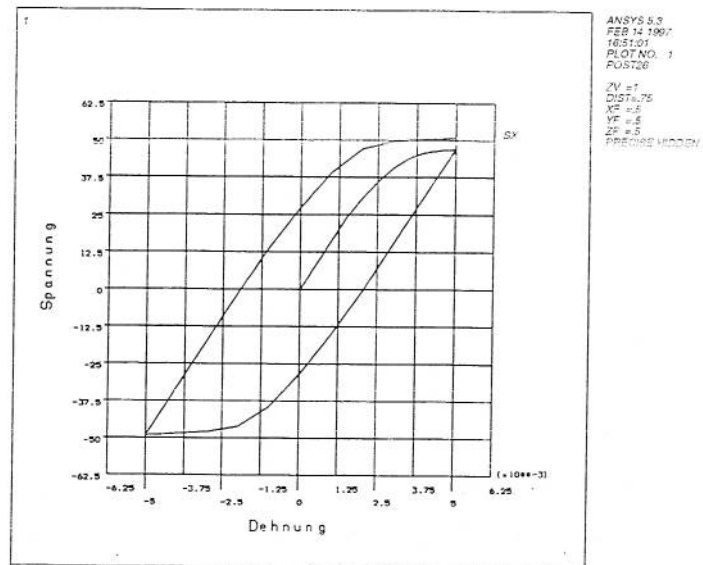


Bild 1: Chaboche-Modell mit kinematischer und isotroper Verfestigung

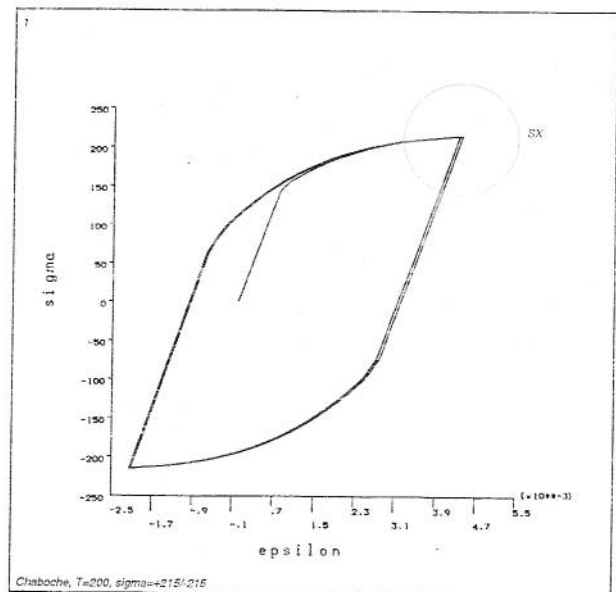


Bild 2: kinematische Verfestigung im Chaboche-Modell

### Temperatureinfluß

Die internen Variablen werden temperaturneutralisiert gespeichert, um unerwünschte zusätzliche Temperaturratcheting-Effekte zu vermeiden. Die entsprechenden Evolutionsgleichungen werden durch die temperaturabhängigen Konstanten geteilt. Dadurch entstehen reduzierte Variable (mit  $\bar{\cdot}$  gekennzeichnet), die gespeichert werden und aus denen bei einer gegebenen Temperatur die eigentlichen Zustandsvariablen erst errechnet werden müssen (vgl. [2]):

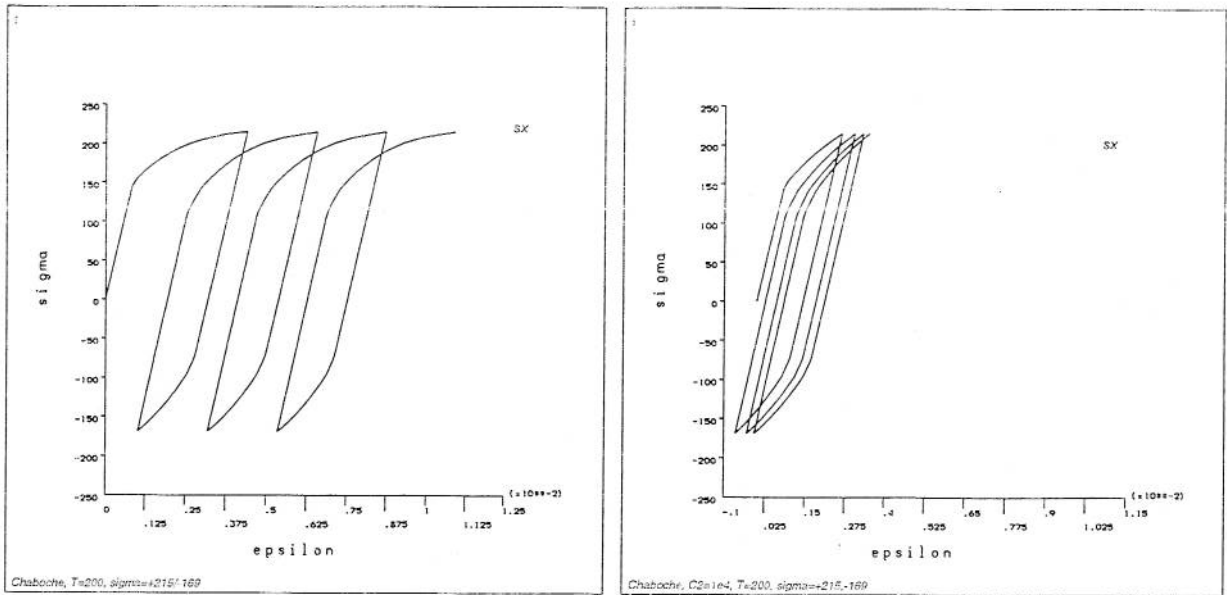


Bild 3: Ratcheting-Verhalten bzw. Einspielen in Abhängigkeit von  $C_2, \gamma_2$

$$d\alpha_i^* = \varepsilon^{pl} - \gamma_i \alpha_i^* d\varepsilon_{eq}^{pl}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^m C_i(T) \alpha_i^*$$

$$dR_i^* = b_i(1 - R_i^*) d\varepsilon_{eq}^{pl}, \quad R = \sum_{i=1}^n Q_i R_i^*$$

Setzt man jetzt für  $T=0$  die Materialparameter  $C_1=3 \cdot 10^4$ ,  $\sigma_f=200$ ,  $E=2 \cdot 10^5$  und variiert die Temperatur zyklisch, so daß sie 200 bei maximaler und 0 bei minimaler Spannung ist, erhält man mit  $\sigma=\pm 215$ , also Mittelspannung 0, Ratcheting (Bild 4).

Dies ist aber nicht verwunderlich, weil bei der Belastung zur negativen Spannung hin wegen der niedrigeren Temperatur eine kleinere plastische Dehnung als bei der positiven Spannung auftritt. Weil die plastischen Dehnungen gerade so groß sind wie in Bild 3 (so ist die zugehörige Berechnung angelegt worden), ergibt sich auch eine Verschiebung der Schleife um den gleichen Betrag. Temperaturratcheting ist also kein eigenständiges Phänomen, Maßstab ist lediglich nicht die Mittelspannung, sondern das Dehnungsverhältnis, was im isothermen Fall aber direkt zusammenhängt. Vergrößert man den Betrag der negativen Spannung, geht das Ratcheting zunächst zurück.

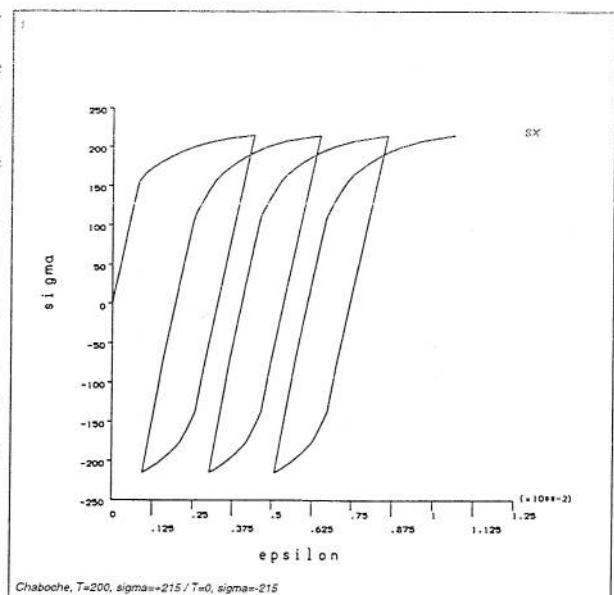


Bild 4: Ratcheting in nicht isothermen Zyklen

Mroz

Eine gegebene nichtlineare Materialkurve mit bis zu 5 Punkten  $\{\epsilon_i, \sigma_i\}$  wird in eine Folge von Fließflächen abgebildet. Diese Fließflächen haben die Fließgrenze

$$\sigma_F^i = \sigma_i$$

und den Tangenten- bzw. Verfestigungsmodul

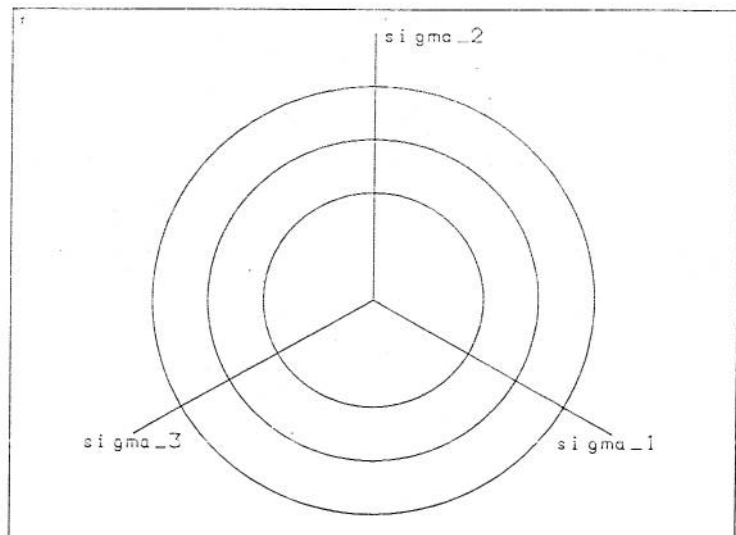
$$E_{Ti} = \frac{(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i)} \rightarrow H_i = \frac{E E_{Ti}}{E - E_{Ti}}$$

Der Tangentenmodul der äußersten Fließfläche ist ein Eingabewert.

Das Inkrement der plastischen Dehnungen ist nach der Normalenregel (assoziierte Fließregel)

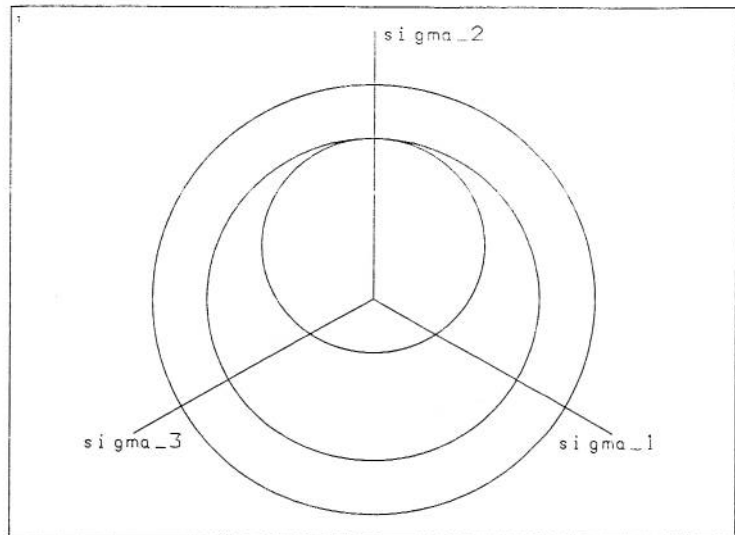
$$\Delta \epsilon^{pl} = \lambda \frac{\partial F}{\partial (\sigma - \alpha)}$$

Die Fließflächen sind geschachtelt und haben zu Beginn das gleiche Zentrum (Bild 5).

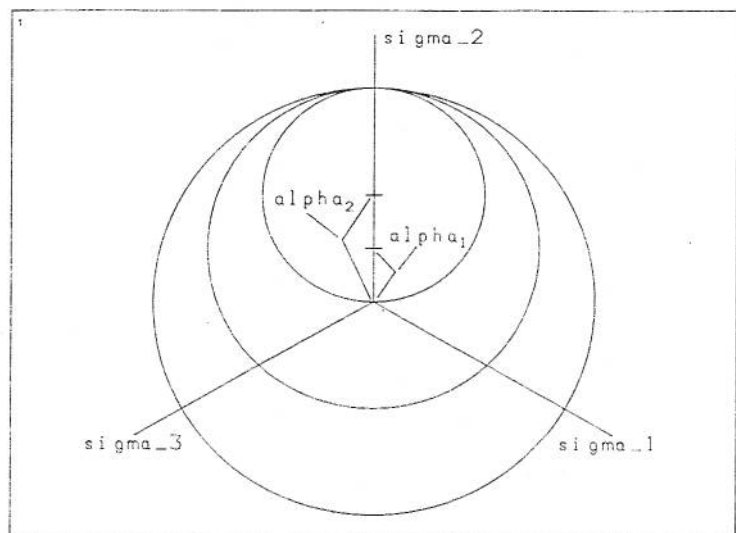


**Bild 5: Mehrere Fließflächen zu Beginn der Berechnung/Belastung**

Bei einer proportionalen Belastung verschiebt sich die innerste Fließfläche um  $\alpha$  in Richtung der Spannung, bis sie die nächste berührt (Bild 6). Dann bewegen sich die beiden innersten Flächen zusammen usw. (Bild 7). Bei diesem Vorgang treten plastische Dehnungen  $\epsilon^{pl}$  auf. Bei proportionaler Belastung haben die Inkremente der plastische Dehnungen und  $\Delta \alpha$  dieselbe Richtung.



**Bild 6: Verschiebung der ersten Fließfläche bis zum Berühren der zweiten bei proportionaler Belastung**



**Bild 7: Verschiebung der ersten und zweiten Fließfläche bis zum Berühren der dritten bei proportionaler Belastung**

Bei nichtproportionaler Belastung soll durch eine geeignete Maßnahme dafür gesorgt werden, daß die Fließflächen geschachtelt bleiben. Das ist der Kern des Mroz-Modells. Beim Besseling-Modell (MKIN in ANSYS) ist diese Eigenschaft nicht gewährleistet.

Gegeben ist ein (Trial-)Spannungspunkt  $\sigma$ . Daraus werden die Deviatorspannungen

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (15)$$

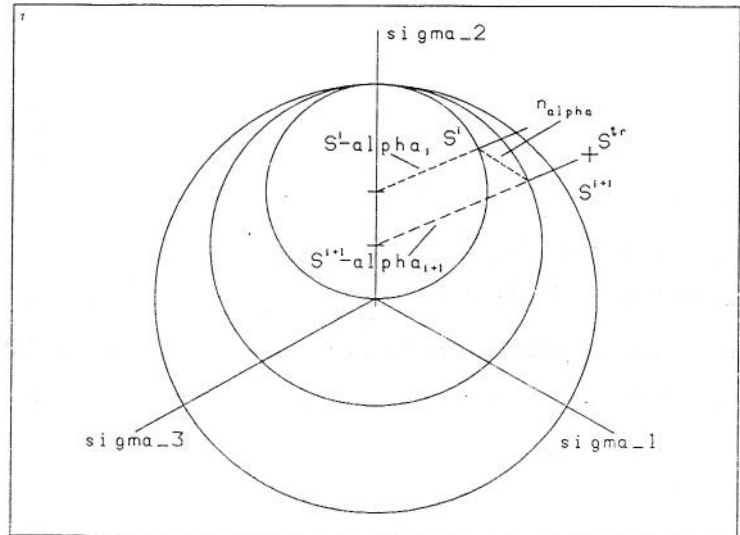
berechnet, wobei  $\sigma_m$  die mittlere Spannung, der hydrostatische Anteil, und  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta ist, das dafür sorgt, daß nur die Normalspannungen um die Mittelspannung reduziert werden. Betrachten wir die Fließfläche  $i+1$ , so ist  $S^{i+1}$  der

Punkt im Spannungsraum, der die Projektion von  $S$  auf die Fließfläche in Richtung von  $S - \alpha_{i+1}$  darstellt. Dann gibt es einen Punkt  $S^i$  auf der  $i$ -ten Fließfläche, so daß  $S^i - \alpha^i$  die gleiche Richtung wie  $S^{i+1} - \alpha^{i+1}$  hat.

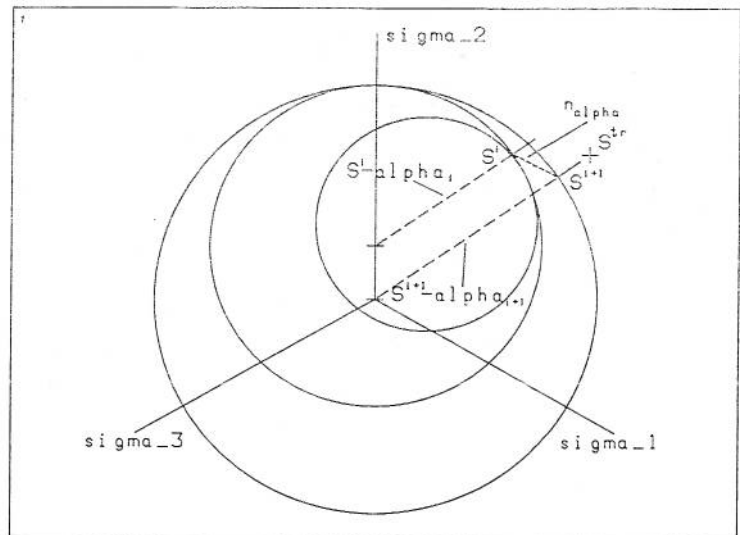
Wählt man nun als Richtung der Veränderung von  $\alpha_i$

$$n_\alpha = S^{i+1} - S^i$$

berühren sich die Fließflächen, wenn die Länge der Veränderung von  $\alpha_i$  der Länge von  $n_\alpha$  entspricht. Bis dahin ist die Fließfläche  $i$  aktiv, danach  $i+1$ , und die eingeschlossenen Fließflächen bewegen sich mit  $i+1$ . Bild 8 und 9 zeigen diesen Zusammenhang in der Deviatorebene. Hier haben  $\Delta\alpha$  und  $\Delta\epsilon^{pl}$  nicht mehr die gleichen Richtungen.



**Bild 8: Bestimmung der Richtung von  $\Delta\alpha$  bei Wechsel der Lastrichtung, Fließflächen 1 und 2**



**Bild 9: Bestimmung der Richtung von  $\Delta\alpha$  bei Wechsel der Lastrichtung, Fließflächen 2 und 3**

Zu beachten ist noch, daß sich der Spannungspunkt  $S$  auf die aktive Fließfläche zu bewegt.

Das gesamte plastische Dehnungsinkrement ergibt sich als Summe über alle aktiven Fließflächen.



## Temperaturabhängigkeit

Für fünf Temperaturen können verschiedene Spannungs-Dehnungs-Linien mit gleicher Stützstellenzahl eingegeben werden. Dementsprechend ergeben sich verschiedene Verfestigungsmoduln  $H$ .

Zur Vermeidung von Temperatur-Ratcheting werden die Verschiebungen der Fließfläche  $\alpha$  ohne die temperaturabhängigen Werkstoffwerte  $H$  als Zustandsvariable  $sv^i$  gespeichert:

$$sv^i \leq sv^i + \Delta\alpha_i \frac{1}{H_i}$$

Da sich die Flächen nach dem Berühren mit der jeweils aktiven bewegen, ergibt sich  $\alpha$  zu Beginn eines neuen Inkrementes als

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^n sv^i \cdot H_i$$

wobei  $n$  die Gesamtzahl der Fließflächen oder Stützstellen ist.

## Beispiele

1)  
Gegeben sei ein Material mit den Fließgrenzen  $\sigma_p^1 = 200 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_p^2 = 300 \text{ N/mm}^2$ . Ein Einheitswürfel mit Minimallagerung wird zunächst mit einer Druckspannung von  $300 \text{ N/mm}^2$  in  $x$ -Richtung belastet. Dann erfolgt eine Entlastung auf  $0$  und gleichzeitig eine Belastung in  $y$ -Richtung auf  $-250 \text{ N/mm}^2$ . Dann wird die Spannung in  $y$ -Richtung auf  $-350 \text{ N/mm}^2$  erhöht. Da die äußere Fließfläche nicht bewegt wurde, muß bei einer einachsigen

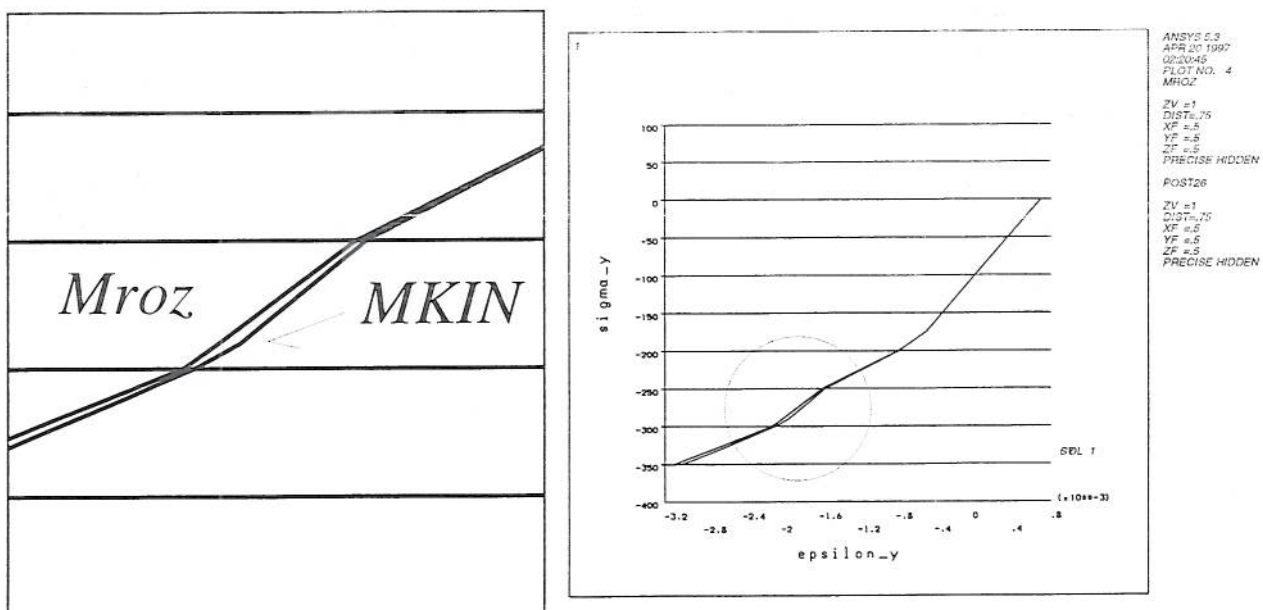


Bild 11: Vergleich von Mroz- und Besseling-Modell bei Wechsel der Lastrichtung

Beanspruchung von über 300 N/mm<sup>2</sup> Fließen dieser Fläche eintreten. In Bild 11 erkennt man, daß beim Mroz-Modell (die Spannungs-Dehnungs-Linie genau bei 300 N/mm<sup>2</sup> einen Knick aufweist, während er beim Besseling-Modell an anderer Stelle liegt.

2)  
 Gegeben sei ein Material mit den Fließgrenzen  $\sigma_F^1 = 200 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^2 = 300 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^3 = 400 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^4 = 500 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_F^5 = 600 \text{ N/mm}^2$ . Zunächst wird eine ständige Belastung von  $\sigma = 200 \text{ N/mm}^2$ , also direkt an der ersten Fließgrenze aufgebracht. Dann erfolgt eine zyklische Querbelastung mit  $\sigma_y = \pm 450 \text{ N/mm}^2$ . Bild 12 zeigt, daß sich beim Mroz-Modell vom zweiten Halbzyklus an die Spannungs-Dehnungs-Linien wiederholen, während beim Besseling-Modell eine Verschiebung der Schleifen erfolgt (Bild 13). So beeinflusst also die Wahl eines dieser Modelle das Einspiel-/Ratcheting-Verhalten bei nicht proportionaler Belastung.

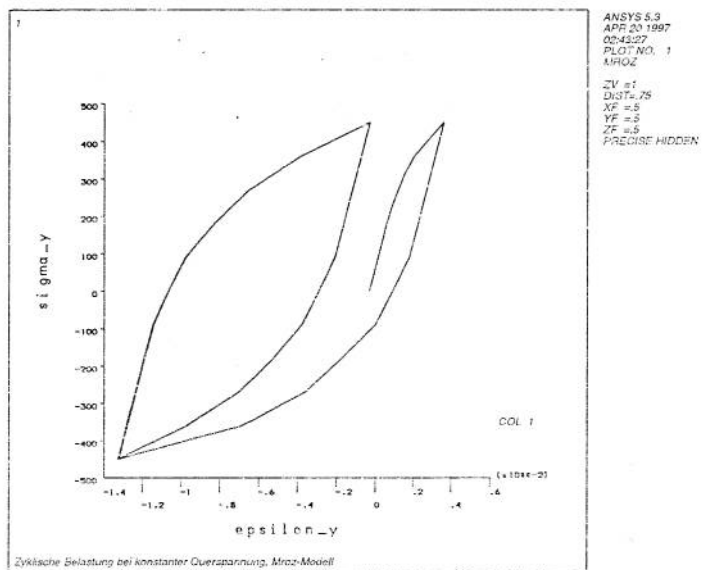


Bild 12: Zyklische Belastung bei konstanter Querspannung beim Mroz-Modell

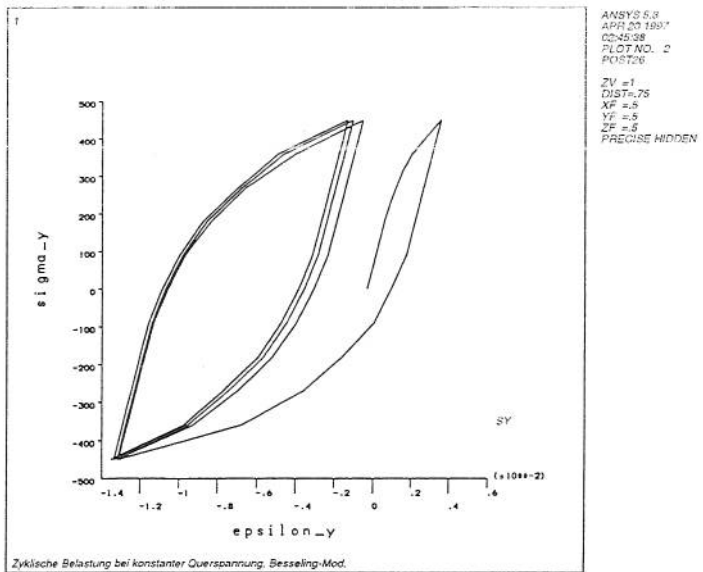


Bild 13: Zyklische Belastung bei konstanter Querspannung beim Besseling-Modell

3)

Gegeben sei ein Material mit den Fließgrenzen wie unter 2) bei  $0^\circ$  sowie  $\sigma_F^1 = 150 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^2 = 250 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^3 = 350 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_F^4 = 450 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_F^5 = 550 \text{ N/mm}^2$  bei  $500^\circ$ . Der E-Modul beträgt  $200000 \text{ N/mm}^2$  bei  $0$  und  $150000 \text{ N/mm}^2$  bei  $500^\circ$ . An die Lastaufbringung auf  $525 \text{ N/mm}^2$  bei konstant  $500^\circ$  schließen sich Zyklen an, bei denen gleichzeitig die Temperatur zwischen  $0$  und  $500^\circ$  und die einachsige Spannung zwischen  $-525$  und  $+525 \text{ N/mm}^2$  verändert wird. Die Zyklen sind stabil, es tritt - anders als mit Standard-MKIN (TBOPT=0)(Bild 15) - kein Ratcheting auf (Bild 14).

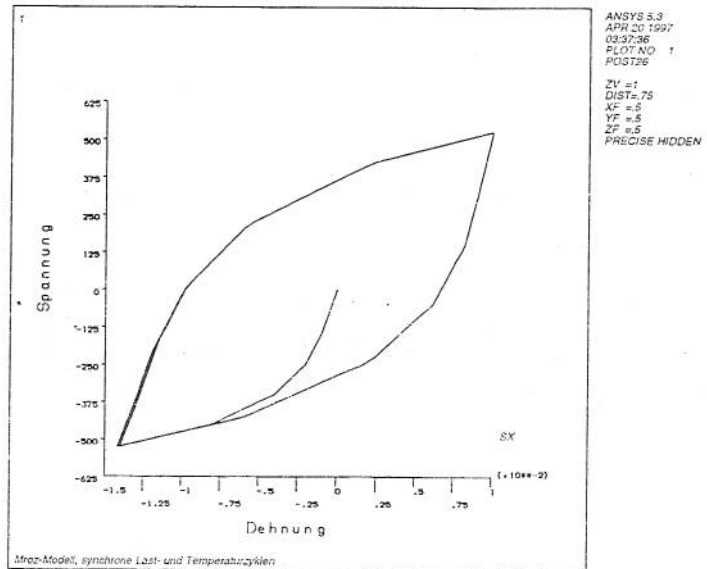


Bild 14: Synchrone Last- und Temperaturzyklen beim Mroz-Modell

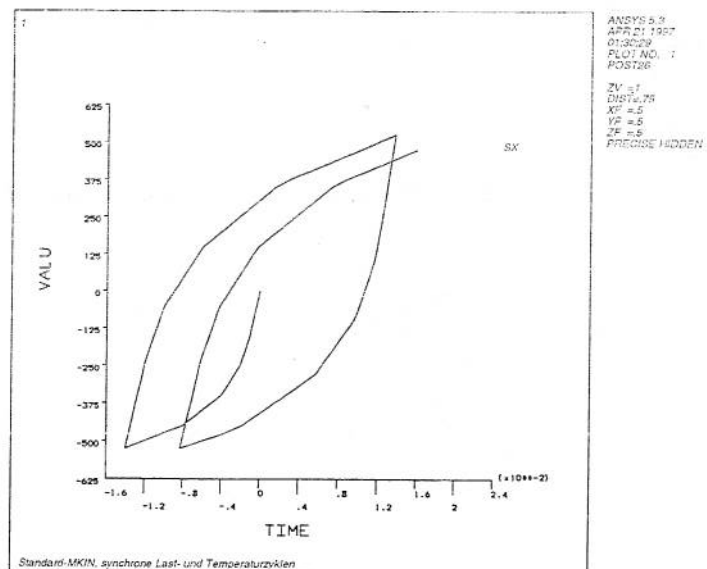


Bild 15: Synchrone Last- und Temperaturzyklen beim Standard-MKIN-Modell

### Plastisch kompressible Materialien (Pulvermetall)

Die klassischen Werkstoffgesetze für Plastizität, wie sie in ANSYS implementiert sind, gehen von der Inkompressibilität der plastischen Verformung aus, d.h. die plastische Volumendehnung ist 0. Das ist für das Verpressen von Metallpulver nicht zutreffend. Daher wird die Von-Mises-Fließbedingung  $J(\sigma)$  um einen Term erweitert, der von der plastischen

Volumendehnung  $\epsilon_V^{pl}$  abhängig ist:

$$F = J(\sigma) + \beta(\epsilon_V^{pl})\sigma_m \leq \sigma_F(\epsilon_V^{pl})$$

Dabei bedeutet  $\sigma_m$  die mittlere Spannung, also den hydrostatischen Anteil,  $\sigma_F$  die Fließgrenze. Wenn  $\beta$  und  $\sigma_F$  konstant sind, ergibt sich das in ANSYS schon vorhandene Drucker-Prager-Gesetz (DP). Da bei einer assoziierten Fließregel die plastische Volumendehnung aufgrund der Von-Mises-Fließbedingung Null ist, kann nur der Term mit  $\beta$  eine solche liefern. Die Ableitung nach den einzelnen Komponenten ergibt  $\beta/3$ , das Inkrement der plastischen Volumendehnung also

$$\Delta\epsilon_V^{pl} = \lambda\beta$$

Das bedeutet, daß die Volumendehnung bei positivem  $\beta$  unabhängig von der mittleren Spannung, also auch bei Druck, nur größer werden kann. Mit negativem  $\beta$  wird das Volumen kleiner, weshalb diese Eigenschaft für Metallpulver unproblematisch ist, da wesentliche Volumenänderungen nur im Druckbereich auftreten. Um aber auch in beiden Richtungen korrekt zu arbeiten, wurde auch

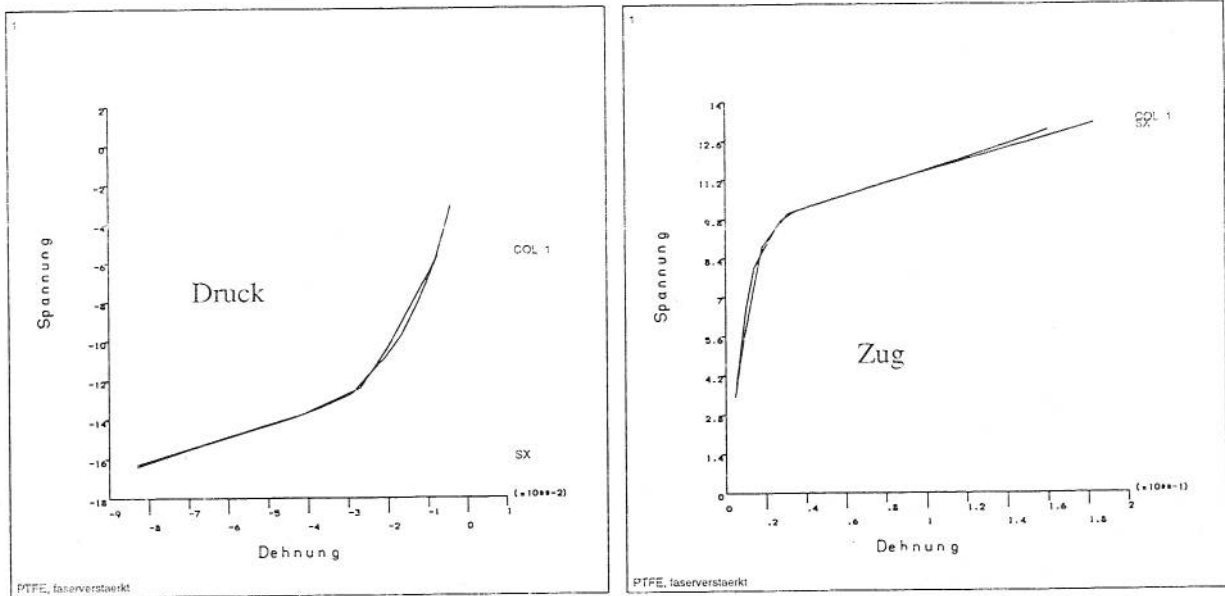
$$J(\sigma) + \beta(\epsilon_V^{pl})|\sigma_m| \leq \sigma_F(\epsilon_V^{pl}) \rightarrow \Delta\epsilon_V^{pl} = \lambda\beta \text{ sign}(\sigma_m)$$

implementiert, wodurch Druck zur Verkleinerung und Zug zur Vergrößerung des Volumens führt.

Beim gewöhnlichen Drucker-Prager-Gesetz führt ein positives  $\beta$  zu einer Fließfläche, die einen zur Druckseite sich öffnenden Kegel darstellt, was bedeutet, daß die Druckfestigkeit deutlich höher als die Zugfestigkeit ist, wie es den Eigenschaften von granularen Materialien entspricht. Für die korrekte Volumenänderung benötigt man bei einer assoziierten Fließregel aber eine zur Druckseite zeigende Kegelspitze. In diesem Modell wird der Widerspruch dadurch aufgelöst, daß die Fließgrenze von der plastischen Volumendehnung abhängt und dadurch eine Verfestigung unter Druck beschrieben werden kann.

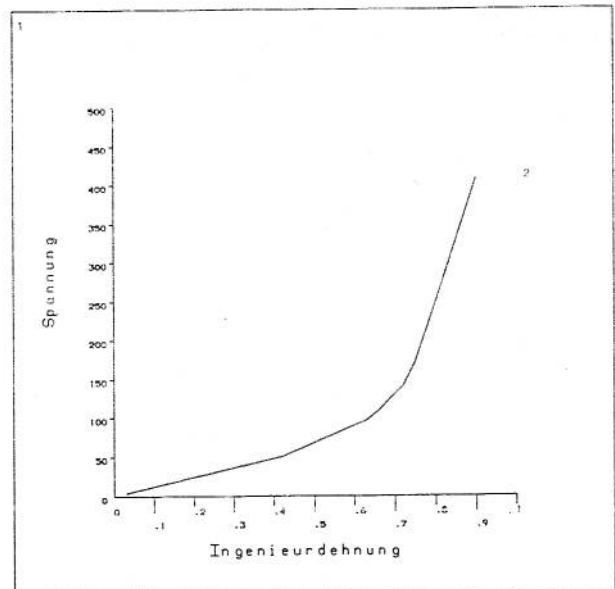
Neben dem Verpressen von Metallpulver und anderen granularen oder sonstigen plastisch kompressiblen Materialien - auch verschiedene Dichtungswerkstoffe gehören dazu - kann man mit diesem Modell auch im Zug- und Druckbereich unterschiedliche Spannungs-Dehnungs-Beziehungen simulieren. Der Weg zur Bestimmung der Parameter sei für diesen Fall kurz skizziert:

Aus der Gesamtdehnung kann die plastische bestimmt werden, indem man  $\sigma/E$  abzieht. Über  $\beta$  erhält man  $\lambda$ , damit die Dehnungskomponenten und dann die plastische Volumendehnung. Für das Drucker-Prager-Gesetz ist bekannt, wie man aus gegebenen Werten für die Zugfestigkeit  $\sigma_z$  und die Druckfestigkeit  $\sigma_D$   $\beta$  und  $\sigma_F$  bestimmt. Anstelle der Festigkeiten muß man nun Zug- und Druckspannungen wählen, die zur gleichen Volumendehnung gehören. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man für diesen Weg  $\beta$  kennen muß, um  $\beta$  zu bestimmen. Das ist aber mit einem APDL-Makro iterativ lösbar. Bild 16 zeigt eine an eine gemessene Kurve angepaßte rechnerische Spannungs-Dehnungs-Linie für ein Dichtungsmaterial mit unterschiedlichem Zug- und Druckverhalten. Die Berechnungen erfolgten mit denselben Parametern, aber für getrennte Lastfälle, weil ja Plastizität und damit Wegabhängigkeit im Spiel ist. Die Ergebnisse sind deshalb getrennt als Vergleich Messung-Berechnung dargestellt. Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen.



**Bild 16: Vergleich Messung und Rechnung für unterschiedliches plastisches Verhalten im Druck- und Zugbereich, simuliert mit dem CAD-FEM-Pulvergesetz**

Das folgende Beispiel ist erdacht, aber nicht völlig aus der Luft gegriffen. In einem Versuch mit Metallpulver, bei dem einachsiger Zug durchgeführt wird und in den beiden anderen Richtungen Dehnungsbehinderung vorliegt, erhält man die einachsige Spannung aus Bild 17. Die Ingenieurdehnung ist in diesem Fall proportional zur Volumendehnung.



**Bild 17: Materialverhalten des Pulvers beim Verpressen**

Bild 18 zeigt das Ausgangssystem und das Modell am Ende des Verpressvorgangs. Das Modell ist rotationssymmetrisch; es stellt ein Rad mit der Nabe links und der Lauffläche rechts dar. Man erkennt, daß sich an einer Stelle das Material vom Stempel löst. Die Simulation zeigt also einen Schwachpunkt beim Verpressen auf. Bild 19 zeigt die relative Dichte, die sich aus der plastischen Volumendehnung, die eine Ausgabegröße ist, errechnen läßt, und Bild 20 die 10fach überhöhte Rückfederungsverformung nach Wegnahme aller Werkzeuge.

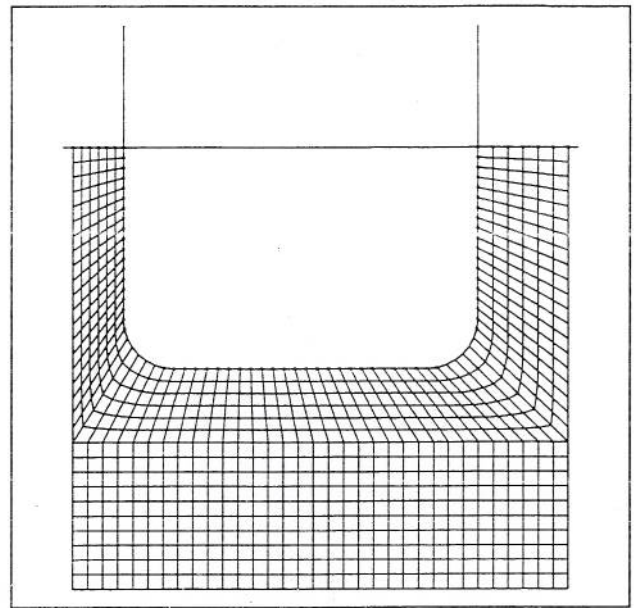
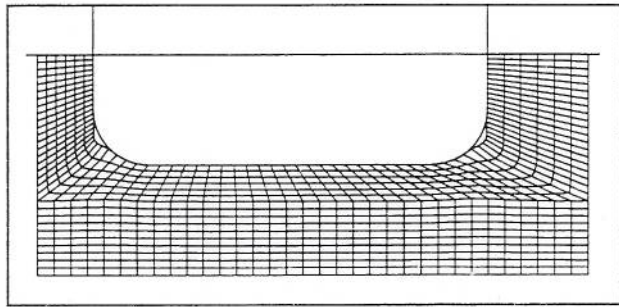


Bild 18: Modell vor und nach dem Verpressen

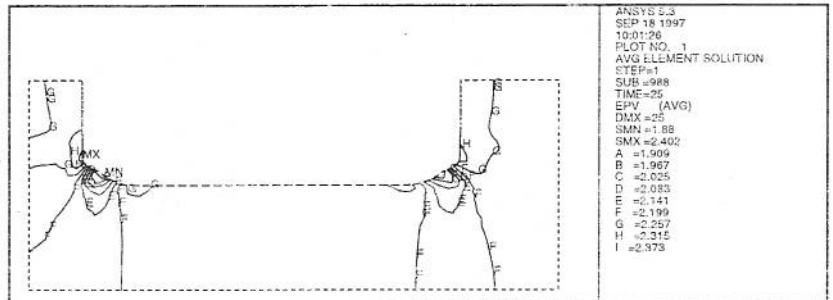


Bild 19: relatives Volumen (Verdichtungsgrad) nach dem Verpressen

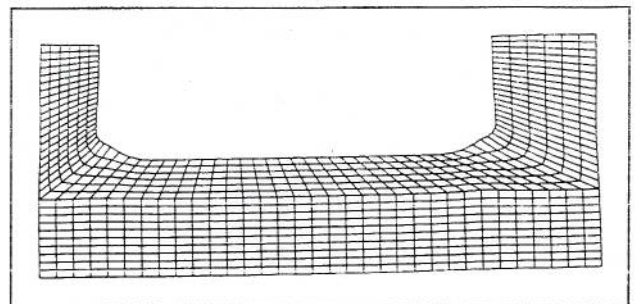


Bild 20: Rückfederung, 10fach überhöht

## Tresca

Der Entwurf einer "Pressure Equipment Directive - Design by Analysis of Pressure Vessels" der Europäischen Kommission sieht vor, zur Bestimmung einer Vergleichsspannung die Tresca-Hypothese zu verwenden. Eigentlich gedacht als Kennzeichen für Gleitbruch, soll sie hier als Fließbedingung verwendet werden. Ferner kann lineare Verfestigung angesetzt werden.

Die Fließbedingung nach Tresca ist dadurch gekennzeichnet, daß als Vergleichsspannung die größte Hauptspannungsdifferenz verwendet wird. Diese ist, wie man sich am Mohr'schen Spannungskreis klarmachen kann, gleich der maximalen Schubspannung. Die Hauptspannungen lassen sich aus den Invarianten des Spannungsdeviators  $S$  (vgl. Gl. 15) folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

Damit wird die Vergleichsspannung nach Tresca (die nach von Mises zum Vergleich)

$$\sigma_V^{Tresca} = 2\sqrt{J_2} \cos\theta \quad \sigma_V^{von Mises} = \sqrt{3}\sqrt{J_2}$$

Wie die Vergleichsspannung nach von Mises ist auch die nach Tresca von der Mittelspannung unabhängig. Der Winkel  $\theta$  läßt sich in der Deviatorebene (Schnitt durch den Hauptspannungsraum normal zur Verbindungslinie der hydrostatischen Zustände) veranschaulichen (Bild 21). Für  $\theta=30^\circ$  fallen die Vergleichsspannungen nach von Mises und nach Tresca zusammen. Für  $\theta=0$  ergibt sich ein Unterschied von ca. 14%.

Die Fließfläche nach Tresca weist für  $\theta=\pm 30^\circ$  einen Knick auf, ist dort also nicht differenzierbar.

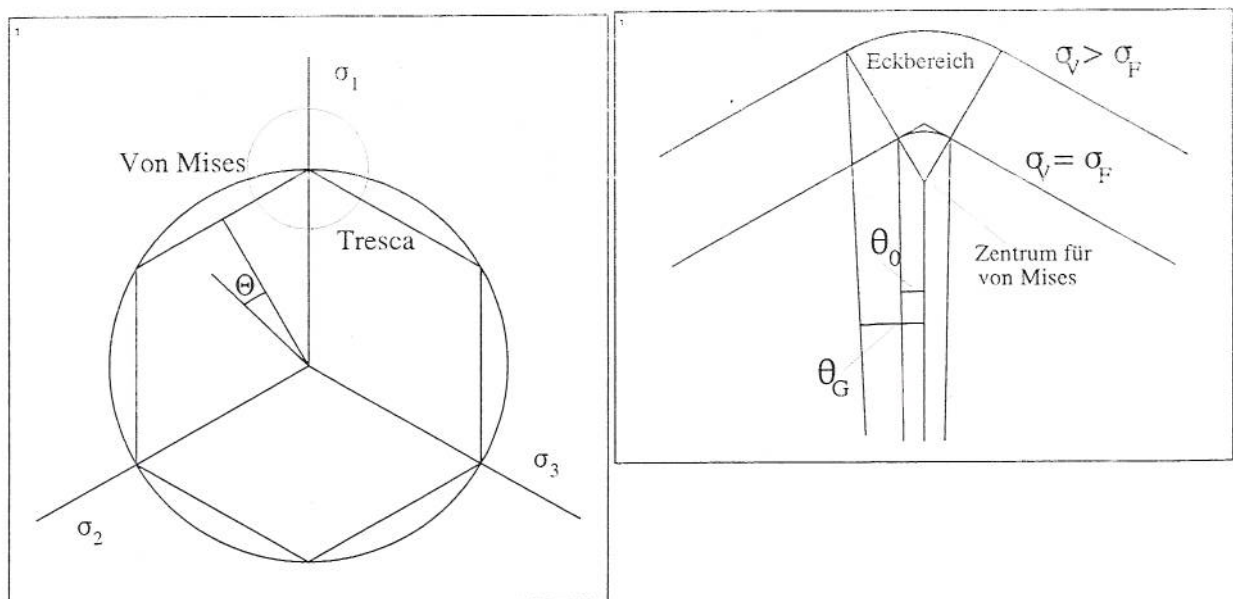


Bild 21: Fließfläche nach Tresca in der Deviatorebene und Ausschnitt Eckbereich

Um dieses Problem zu überwinden, sind verschiedene Ansätze denkbar (vgl. [3]). In der CAD-FEM-Implementierung wird die Fließfläche im Bereich  $\pm\theta_0=1^\circ$  von der Ecke ausgerundet, d.h. durch eine solche nach von Mises ersetzt, deren Zentrum so um  $\alpha$  verschoben ist und deren Fließgrenze so verändert ist, daß am Übergang zwischen Normal- und Eckbereich gleiche Neigungen auftreten. Für (Trial-)Spannungspunkte außerhalb der Fließfläche muß der Grenzwinkel auf  $\theta_G$  vergrößert werden, damit die Projektion stets eindeutig ist. Durch die Ausrundung entsteht bei der Vergleichsspannung ein Fehler von maximal  $5\%$ .

Das folgende Beispiel zeigt das unterschiedliche Verhalten des Tresca-Modells und des Von-Mises-Modells bei sonst gleichen Daten, einer Belastung von  $\sigma_y=0,8 \sigma_F$  und einer variablen Belastung  $\sigma_x$ . Man erkennt in Bild 22, daß in diesem Fall das Fließen bei Tresca deutlich eher, nämlich bei  $\sigma_x = \sigma_F$ , eintritt als bei von Mises, wo die einzelne Komponente höher als die Fließgrenze sein kann.

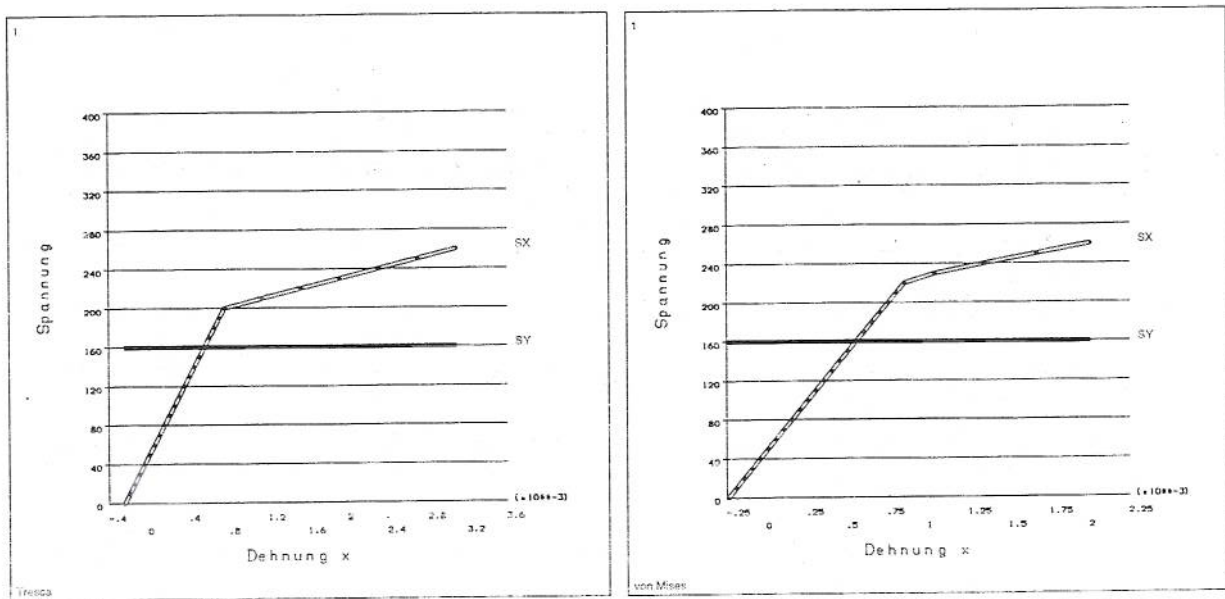


Bild 22: Fließverhalten nach Tresca und von Mises bei zweiachsiger Beanspruchung

In der CAD-FEM-Implementierung ist lineare kinematische Verfestigung beschreibbar.

### Literatur

- [1] Chaboche, J.L.: Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity, Int.J.Plast. 5 (1989), 247-302
- [2] Rust, W./Groth, C./Müller, G.: Considerations of Material Behaviour in the Numerical Solution of Cyclic Thermal and Mechanical Loading using Kinematic Hardening, Proceedings of the 1994 ANSYS Conference, pp. 10.41-10.53, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA.
- [3] Mitchell, G.P./Owen, D.R.J.: Numerical Solutions for Elastic-Plastic Problems, Eng. Comput., 1988, Vol. 5, pp. 274-284