Serie: FEM für Mediziner und Biomechaniker

In der Serie „FEM für Mediziner und Biomechaniker" werden die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode (FEM) erläutert. Entsprechend dem Fokus der **came** werden hier die wesentlichen Eigenschaften der FEM anschaulich dargestellt. Dies ermöglicht einem FEM-Fremden, z. B. einem Arzt, die Qualität einer FEM-Simulation zu beurteilen. Dieses Wissen hilft, beispielsweise Beiträge zum Thema FEM auf Konferenzen oder in Veröffentlichungen qualitativ einzuordnen und FEM-spezifische Begriffe richtig zu verstehen und fördert damit das interdisziplinäre Arbeiten.

Im ersten Teil dieser Artikelserie wurden die FEM-Grundlagen anschaulich dargestellt. In diesem und dem vorherigen Teil aus der **came** 2-2011 werden nun die theoretischen FEM-Grundlagen an einem Handrechenbeispiel erläutert.

Die dann folgenden Teile der Artikelserie beschäftigen sich z. B. mit dem prinzipiellen Ablauf einer FEM-Simulation, mit dem Workflow zur Erstellung von medizinischen FEM-Modellen, mit der Bewertung der Qualität einer FEM-Simulation, mit Nicht-Linearitäten oder mit der Wahl von passenden Randbedingungen.

Das im Folgenden gezeigte Beispiel ist ein Auszug aus dem Buch „FEM für Praktiker" von Günter Müller und Clemens Groth, erschienen im expert verlag, ISBN 978-3-8169-2685-6. Das gesamte Beispiel kann dort im Detail nachgelesen werden.

Teil 3

Ein Handrechenbeispiel – 2

Gekürzt und zusammengestellt von C. Müller*

Im vorherigen Teil „Ein Handrechenbeispiel – 1" (siehe **came** 2-2011) wurden an einem konischen verlaufenden Fachwerkstab die theoretischen Grundzüge einer FEM-Berechnung dargestellt. Anhand von einer Diskretisierung mit zwei Elementen wurde gezeigt, wie die Knotenverschiebungen und die Elementspannungen berechnet werden. Bei der Auswertung der Ergebnisse wurde deutlich, dass die Lösung mit zwei Elementen von der tatsächlichen, analytischen Lösung vergleichsweise stark abweicht.

Im diesem Teil „Ein Handrechenbeispiel – 2" soll nun, aufbauend auf dem Modell vom letzten Teil, eine weitere zentrale Eigenschaft der FEM erläutert werden: wie durch die Art der Diskretisierung die Ergebnisqualität erhöht werden kann, so dass schließlich ein konvergiertes Ergebnis erzielt wird.

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\sum_{e}\{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} - \{u\}^T \cdot \{F\}$$

Hier muss betont werden, dass nur die wichtigsten Schritte erläutert werden können und die Methode bei weitem nicht ausführlich dargestellt werden kann. Zur Vertiefung wird deshalb auf die Literatur verwiesen.

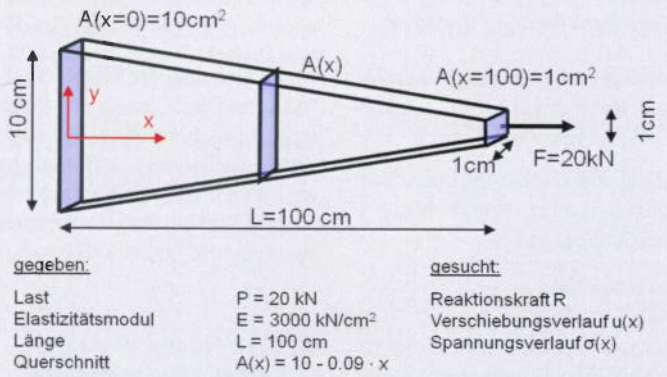


Bild 1: Die Problemstellung ist ein konisch verlaufender Stab, der in Längsrichtung belastet wird. Gesucht ist die durch die Last verursachte Verschiebung und der Spannungsverlauf.

1 Rückblick „Ein Handrechenbeispiel – 1"

Gegeben war ein Fachwerkstab (*Bild 1*) in der x-y-Ebene mit konisch verlaufendem Querschnitt. Er wurde am linken Ende gehalten und am rechten Ende durch eine Einzelkraft F = 20 kN belastet. Das verwendete Material hatte ein Elastizitätsmodul von E = 3000 kN/cm². Die Länge war 100 cm. Der Querschnitt war linear veränderlich und betrug auf der linken Seite 10 cm² und auf der rechten Seite 1 cm². Der konische Verlauf des Querschnitts wurde bewusst gewählt, um einen stark veränderlichen Verlauf der Verschiebungen und Spannungen zu erzwingen. Die Breite des Fachwerkstabes beträgt konstant 1cm über die gesamte Länge.

Aufgrund der Kraft von 20 kN am rechten Ende ergibt sich eine mechanische Belastung des Fachwerkstabes. Gesucht war der durch die Belastung verursachte Verlauf der Längsverschiebung u(x) und der Verlauf der Normalspannung σ(x) über die gesamte Stablänge.

*
Christoph Müller, M.Sc.
Leiter Biomechanik, Geschäftsführer CADFEM GmbH
85567 Grafing b. München

Die Ergebnisse wurden zur Kontrolle der analytischen Lösung gegenübergestellt. Für die Verschiebung an den Knoten ergab sich der in *Bild 2* dargestellte Verlauf.

Die analytische Lösung ist in türkis dargestellt, die FEM-Lösung in lila. Bei der FEM-Lösung erhält man nur an den Stützstellen, also den Knoten, Ergebnisse. Dazwischen wird der Verschiebungsverlauf linear, gemäß der linearen Ansatzfunktion, approximiert. Im Element 1, also von 0 cm bis 50 cm, erhält man bereits eine sehr gute Annäherung an die analytische Lösung. Im Element 2 von 50 cm bis 100 cm ist der Gradient der Verschiebung stärker und lässt sich daher mit einer linearen Verschiebung weniger gut abbilden.

Die Ergebnisse des Spannungsverlaufs werden in *Bild 3* gezeigt. Auch hier wird die analytische Lösung der approximierten FEM-Lösung gegenübergestellt.

Man erkennt hier, dass die Spannungen einen Genauigkeitsverlust erleiden: sie werden pro Element nur konstant wiedergegeben und weisen Sprünge an den Übergangsstellen auf. Dieser Sachverhalt ist typisch für die FE-Methode. Die Spannungen verlaufen i. a. nicht kontinuierlich über die Elementgrenzen hinweg, die Verschiebungen jedoch sind kontinuierlich, ihr Verlauf kann aber Knicke an den Elementgrenzen aufweisen.

Für Element 1 von 0 cm bis 50 cm werden die Spannungen relativ gut wiedergegeben werden. Für Element 2 von 50 cm bis 100 cm ergibt sich eine starke Abweichungen im Vergleich zur exakten Lösung.

Um den Verschiebungsverlauf bzw. den Spannungsverlauf besser abbilden zu können, sind mehr Elemente notwendig.

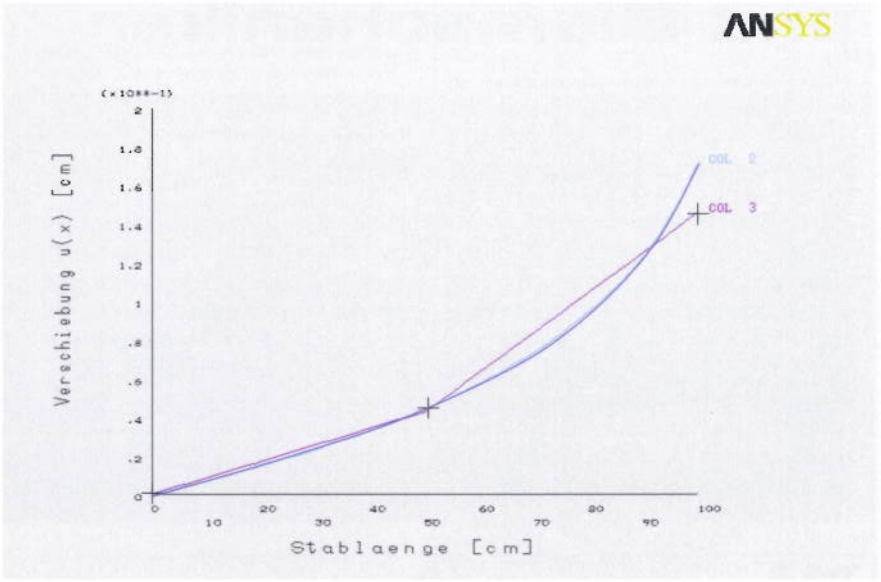


Bild 2: FEM-Lösung der Verschiebung über der Stablänge mit zwei Elementen. Die gesuchten Verschiebungen werden an den Stützstellen (Knoten) ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der linearen Ansatzfunktion dargestellt.

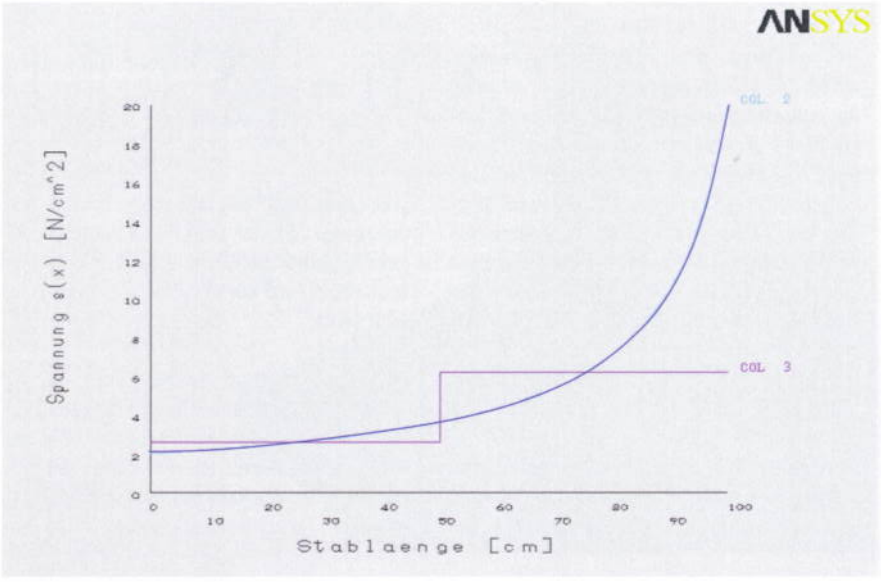


Bild 3: FEM-Lösung der Spannungen über der Stablänge. Die gesuchten Spannungen sind über dem Element konstant.

2 Steigerung der Genauigkeit der Ergebnisse

Die bisher dargestellten Ergebnisse mit zwei Elementen sind noch wenig befriedigend. In den folgenden Abschnitten soll deshalb gezeigt werden, wie die Qualität der Ergebnisse durch

- Erhöhung der Elementanzahl, also eine feinere Aufteilung und damit eine Verdichtung der Elemente durch zusätzliche Elemente (h-Adaptivität, h = Elementgröße),
- Verdichtung der Elementanzahl in Bereichen hoher Spannungsgradienten durch Verschieben der Knoten, die Elementanzahl bleibt dabei gleich (r-Adaptivität, r = Knotenabstand), und
- Verwendung einer quadratischen Elementansatzfunktion (p-Adaptivität, p = Polynomordnung)

verbessert werden kann.

Die einzelnen Lösungsschritte, so wie sie im vorherigen Teil „Ein Handrechenbeispiel – 1" (vergl. Heft 2-2011) beschrieben worden sind, werden dabei nicht nochmals im Detail dargestellt. In dem Beispiel wurden die einzelnen Rechenschritte an zwei Elementen dargestellt. Die Vorgehensweisen zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen und zur Lösung des Gleichungssystems für mehrere Elemente sind analog zu dem Vorgehen mit zwei Elementen. Im Prinzip müssen die dort für zwei Elemente gezeigten Rechenschritte entsprechend für jedes weitere Element wiederholt werden.

3 Höhere Anzahl von Elementen (h-Adaptivität)

Im Folgenden werden die Ergebnisse der FEM-Berechnung mit einer höheren Anzahl von Elementen mit linearem Ansatz

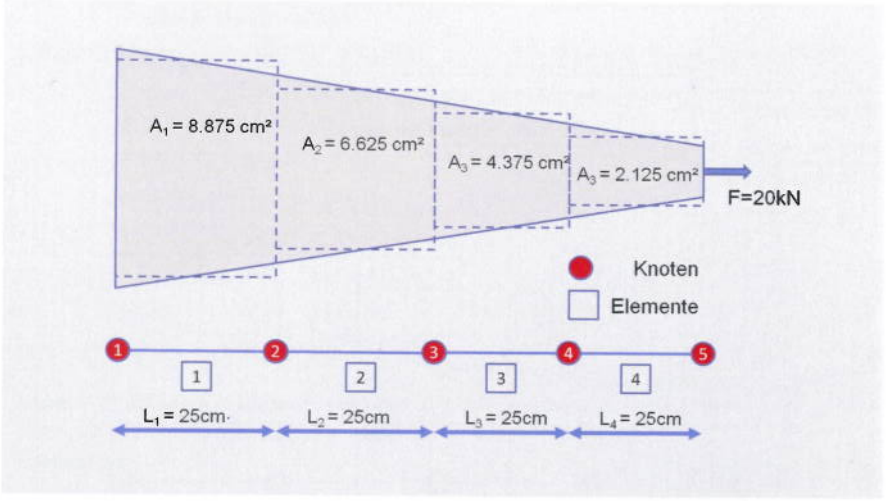


Bild 4: Diskretisierung des Fachwerkstabes mit vier Elementen

dargestellt. Die Erhöhung der Elementzahl wird auch als h-Adaptivität bezeichnet. Zwei Verfeinerungsstufen werden betrachtet: mit vier Elementen und mit acht Elementen.

3.1 Diskretisierung mit vier gleichmäßig verteilten Elementen

Im ersten Beispiel wird die Anzahl der Elemente, im Vergleich zum ersten Modell mit zwei Elementen, verdoppelt, so dass der Fachwerkstab nun mit vier Elementen und dementsprechend mit fünf Knoten vernetzt. Die Diskretisierung ist in *Bild 4* dargestellt.

Die Daten, die für die Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen erforderlich sind, sind in der *Tabelle 1* aufgelistet und ergeben sich aus den geometrischen Eigenschaften und den Materialkennwerten der Elemente. Die Elementlänge ist halb so lang wie bei der Diskretisierung mit zwei Elementen. Die durchschnittliche Querschnittsfläche ändert sich entsprechend des konischen Verlaufs des Fachwerkstabes. Die Materialkennwerte ändern sich nicht.

Die Elementsteifigkeit für ein Fachwerkelement dieser Art ergibt sich gemäß der Formel (die Herleitung der Formel findet sich in Teil 1, **came** 2-2011):

$$[K]_i = \frac{E_i \cdot A_{mi}}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setzt man die Daten gemäß der *Tabelle 1* ein, erhält man für jedes der vier Elemente eine Elementsteifigkeitsmatrix:

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 1065 & -1065 \\ -1065 & 1065 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 795 & -795 \\ -795 & 795 \end{bmatrix}$$

$$[K]_3 = \begin{bmatrix} 525 & -525 \\ 525 & 525 \end{bmatrix}$$

$$[K]_4 = \begin{bmatrix} 255 & -255 \\ -255 & 255 \end{bmatrix}$$

$Element_i$	E	L_i	A_{mi}
1	3000	25	8.875
2	3000	25	6.625
3	3000	25	4.375
4	3000	25	2.125

Tabelle 1: Daten zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit vier Elementen

Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix addiert und in das Gesamtgleichungssystem eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} 1065 & -1065 & 0 & 0 & 0 \\ -1065 & 1860 & -795 & 0 & 0 \\ 0 & -795 & 1320 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & -525 & 780 & -255 \\ 0 & 0 & 0 & -255 & 255 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Die gesuchten Knotenverschiebungen $u_1 - u_5$ können aus dem Gleichungssystem z. B. nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren berechnet werden.

Der Verschiebungsvektor für die Knotenverschiebung der Knoten 1 bis 5 ergibt sich zu:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01878 \\ 0.04394 \\ 0.0823 \\ 0.16046 \end{Bmatrix}$$

In *Bild 5* wird der theoretische Verlauf der analytischen Lösung der FEM-Lösung gegenübergestellt. Man kann deutlich se-

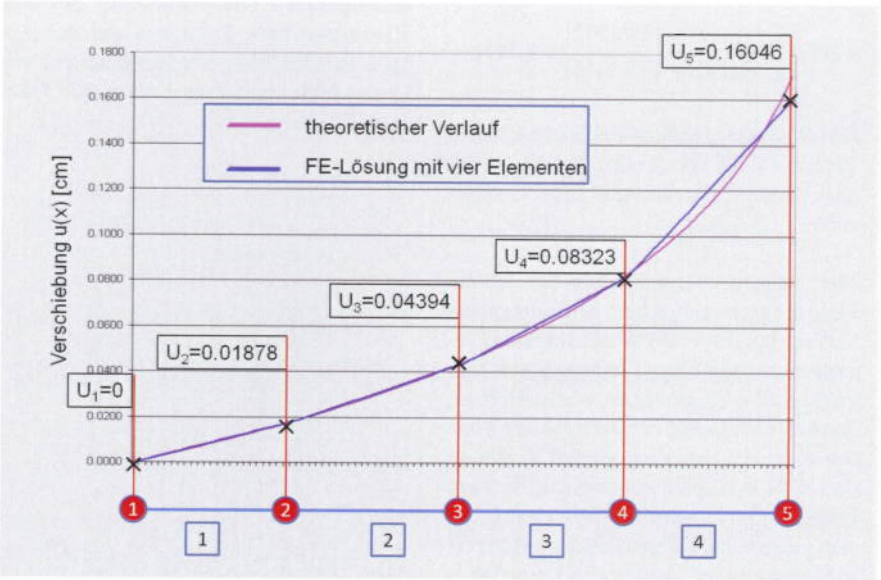


Bild 5: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit vier Elementen mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Verschiebungen werden an den Stützstellen (Knoten, rote Kreise) ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der linearen Ansatzfunktion dargestellt.

hen, dass der Verschiebungsverlauf schon sehr gut mit der analytischen Lösung übereinstimmt. Lediglich die Verschiebung an Knoten 5 ist mit 0.16 cm noch leicht von der „exakten" Lösung von 0.17056 cm entfernt.

Aus den Knotenverschiebungen können die Spannungen in den Elementen nach der Formel berechnet werden (vergl. dazu Teil 1, **came** 2-2011):

$$\sigma(x)_i = E \cdot \left[-\frac{1}{L};\frac{1}{L}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix}$$

Setzt man die Werte in die Formel ein, ergeben sich die Spannungen für die vier Elemente wie folgt:

Element 1

$$\sigma(x)_1$$

$$= 3000 \cdot \left[-\frac{1}{25};\frac{1}{25}\right] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01878 \end{Bmatrix} = 2.2535$$

Element 2

$$\sigma(x)_2$$

$$= 3000 \cdot \left[-\frac{1}{25};\frac{1}{25}\right] \cdot \begin{Bmatrix} 0.01878 \\ 0.04394 \end{Bmatrix} = 3.0189$$

Element 3

$$\sigma(x)_3$$

$$= 3000 \cdot \left[-\frac{1}{25};\frac{1}{25}\right] \cdot \begin{Bmatrix} 0.04394 \\ 0.08203 \end{Bmatrix} = 4.5714$$

Element 4

$$\sigma(x)_4$$

$$= 3000 \cdot \left[-\frac{1}{25};\frac{1}{25}\right] \cdot \begin{Bmatrix} 0.08203 \\ 0.16046 \end{Bmatrix} = 9.4118$$

Der Spannungsverlauf der FEM-Lösung wird in *Bild 6* der „exakten" Lösung der analytischen Berechnung gegenübergestellt.

Man sieht hier wieder schön den für die FEM charakteristischen Spannungsverlauf, der bei den verwendeten linearen Elementen entlang eines Elementes konstant verläuft. Die Spannungen werden an dem Elementmittelpunkt ermittelt (blaues Viereck zwischen den Knoten) und dann von dort auf die Knoten extrapoliert. An dem Übergang von einem Element zum nächsten gibt es je nach Spannungsgradient einen mehr oder weniger ausgeprägten Spannungssprung. Beim Übergang von Element 3 zu Element 4, dem Knoten 4, sind z. B. noch deutliche Spannungsunterschiede, was ein Charakteristikum für ein nicht konvergiertes Ergebnis ist.

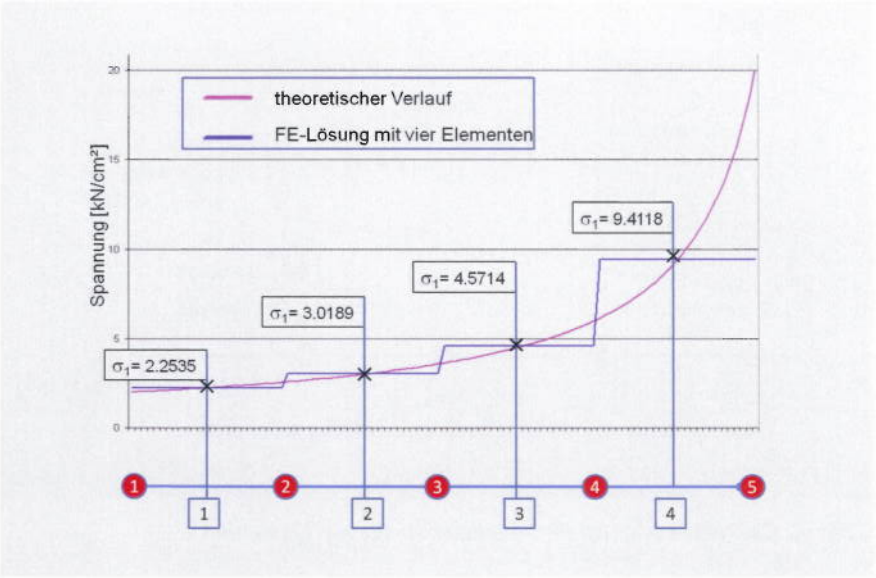


Bild 6: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit vier Elementen mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Spannungen werden im Elementmittelpunkt berechnet und sind über die Elementlänge konstant.

Die tatsächliche Spannung am rechten Balkenende von 20 kN/cm² wird bei der Berechnung mit vier Elementen mit 9.4118 20 kN/cm² noch schlecht getroffen.

Daher wird die Anzahl der Elemente von vier auf acht erhöht.

3.2 Diskretisierung mit acht gleichmäßig verteilten Elementen

Das Beispiel mit acht Elementen wird analog zum Beispiel mit vier Elementen durchgeführt. Die Vernetzung mit acht Elementen bzw. 9 Knoten und den entsprechenden Elementeigenschaften, wie Querschnitt und Länge, sind in *Bild 7* dargestellt.

Die Daten, die für die Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen erforderlich sind, sind in der *Tabelle 2* aufgelistet und ergeben sich aus den geometrischen Eigenschaften und den Materialkennwerten der Elemente. Die Elementlänge ist halb so lang wie bei der Diskretisierung mit vier Elementen. Die durchschnittliche Querschnittsfläche ändert sich entsprechend des konischen Verlaufs des Fachwerkstabes. Die Materialkennwerte bleiben konstant.

Die Elementsteifigkeit für ein Fachwerkelement dieser Art ergibt sich wieder gemäß der Formel:

$$[K]_i = \frac{E_i \cdot A_{mi}}{L_i} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

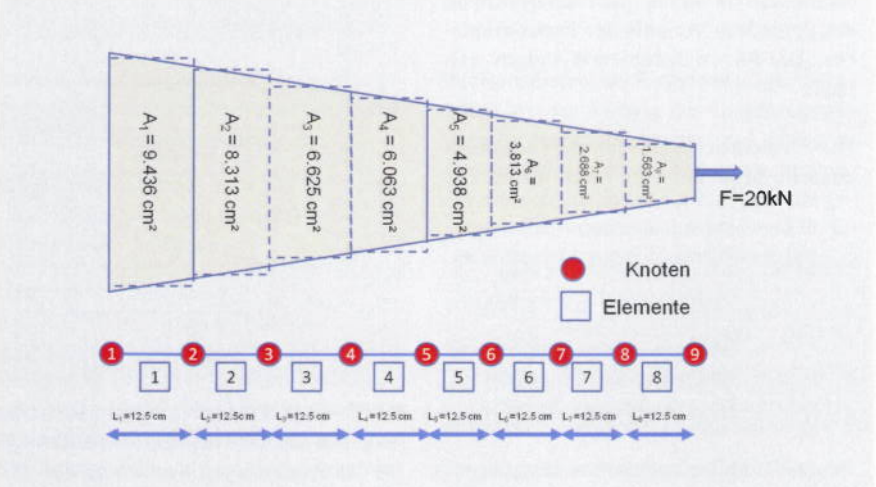


Bild 7: Diskretisierung des Fachwerkstabes mit acht Elementen

8 Elemente, gleiche Länge			
Element$_i$	A_{mi}	L_i	$E \cdot (A_{mi}/L_i)$
1	9.436	12.500	2265.0
2	8.313	12.500	1995.0
3	7.188	12.500	1725.0
4	6.063	12.500	1455.0
5	4.938	12.500	1185.0
6	3.813	12.500	915.0
7	2.688	12.500	645.0
8	1.563	12.500	375.0

Tabelle 2: Daten zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit acht Elementen

Setzt man die Daten gemäß der *Tabelle 2* ein und fügt die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen ein, erhält man das Gesamtgleichungssystem:

(Hinweis: die leeren Einträge der Steifigkeitsmatrix entsprechen einer „Null")

$$\begin{bmatrix} 2265 & -2265 & & & & & & & \\ -2265 & 4260 & -1955 & & & & & & \\ & -1955 & 3720 & -1725 & & & & & \\ & & -1725 & 3180 & -1455 & & & & \\ & & & -1455 & 2640 & -1185 & & & \\ & & & & -1185 & 2100 & -915 & & \\ & & & & & -915 & 1560 & -645 & \\ & & & & & & -645 & 1020 & -375 \\ & & & & & & & -375 & 375 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Das Gleichungssystem wird nach dem Verschiebungsvektor aufgelöst und die einzelnen gesuchten Knotenverschiebungen $u_1 - u_9$ werden berechnet. Der folgende Verschiebungsvektor ergibt sich:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00883 \\ 0.01886 \\ 0.03045 \\ 0.04419 \\ 0.06107 \\ 0.08293 \\ 0.11394 \\ 0.16727 \end{Bmatrix}$$

In *Bild 8* wird zur Kontrolle der theoretische Verlauf der analytischen Lösung der FEM-Lösung gegenübergestellt. Die Verschiebung stimmt bereits sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Lediglich die Verschiebung an Knoten 9 ist mit 0.16276 cm noch leicht von der „exakten" Lösung von 0.17056 cm entfernt.

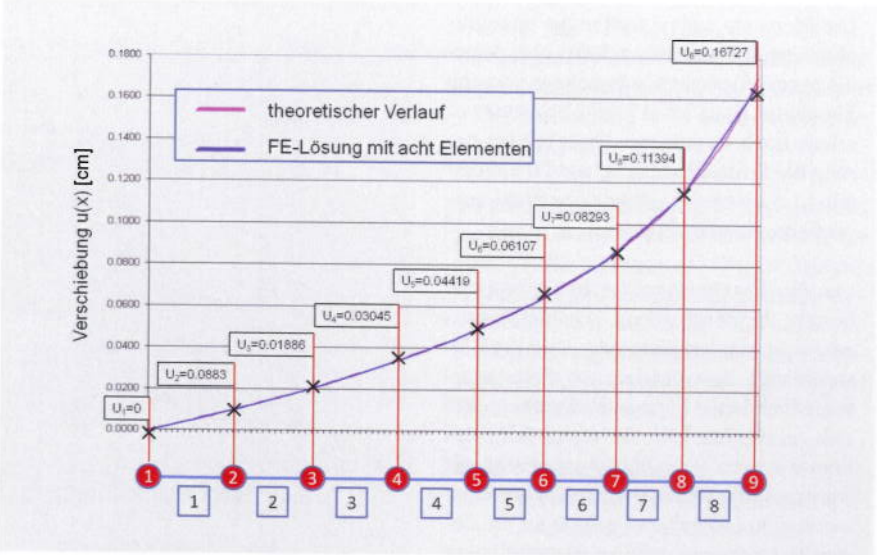


Bild 8: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Verschiebungen werden an den Stützstellen (Knoten, rote Kreise) ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der linearen Ansatzfunktion dargestellt.

Aus den Knotenverschiebungen werden die Spannungen in den acht Elementen nach der Formel berechnet:

$$\sigma(x)_i = E \cdot \left[-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{Bmatrix}$$

Der Spannungsverlauf der FEM-Lösung mit acht Elementen wird in *Bild 9* der „exakten" Lösung der analytischen Berechnung gegenübergestellt.
Auch hier sieht man wieder den Effekt, dass die Spannungen, die im Elementmittelpunkt berechnet werden, über die Elementlänge konstant sind und am Übergang von einem Element zum nächsten, also an den Knoten, Spannungssprünge aufweisen.

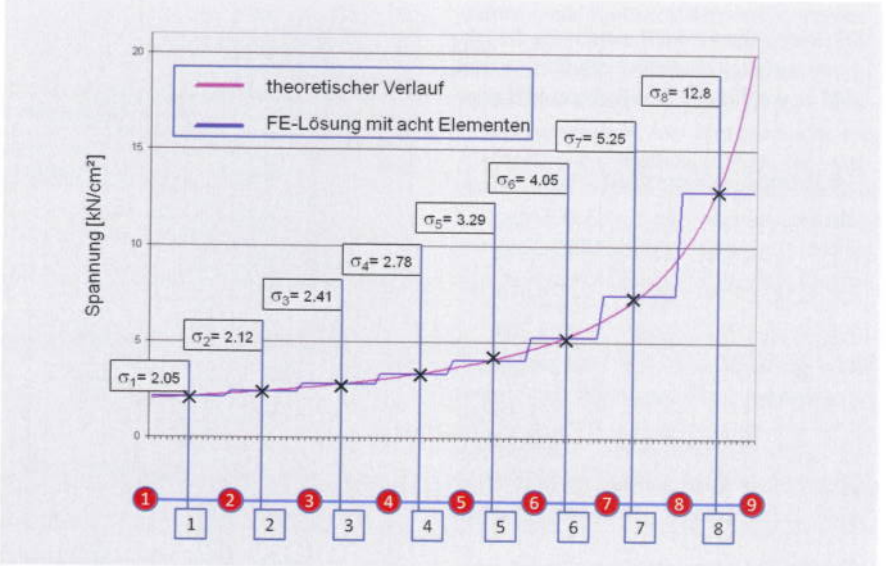


Bild 9: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Spannungen werden im Elementmittelpunkt (blaue Vierecke zwischen den Knoten) berechnet und sind über die Elementlänge konstant.

Die Elemente 1 bis 5 treffen die tatsächliche Spannung bereits relativ gut. Allerdings sind die Spannungssprünge von den Elementen 6 auf 7 und 7 auf 8 nach wie vor relativ hoch, so dass mit dieser Elementierung die Spitzenspannung von 20 kN/cm² mit 12.8 kN/cm² nach wie vor nicht ausreichend gut getroffen wird.

Um die Ergebnisqualität zu verbessern, besteht die Möglichkeit, die Elementanzahl weiter zu erhöhen oder aber die Elementdichte zu verändern, so dass unterschiedlich lange Elemente entstehen. Wie sich gezeigt hat, kann die rechte Seite des Stabes von ca. 0 cm bis 50 cm bereits mit wenigen Elementen sehr gut abgebildet werden. Folglich bietet es sich an, in diesem Bereich eine gröbere Elementierung zu wählen und den Bereich von ca. 50 cm bis 100 cm mit einer feineren Elementierung zu versehen. Dieses Verfahren – an Stellen mit großer Spannungsänderung feiner zu vernetzen als an Stellen ohne Spannungsänderung – nennt man auch r-Adaptivität.

3.3 Diskretisierung mit acht ungleichmäßig verteilten Elementen (r-Adaptivität)

Das Beispiel mit acht Elementen unterschiedlicher Länge (die sog. r-Adaptivität) wird analog zum Beispiel mit acht Elementen gleicher Länge durchgeführt. Die Vernetzung mit den acht unterschiedlich langen Elementen und den entsprechenden Elementeigenschaften, wie Querschnitt und Länge, sind in *Bild 10* dargestellt.

Die Daten, die für die Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen erforderlich sind, sind in der *Tabelle 3* aufgelistet und ergeben sich aus den geometrischen Eigenschaften und den Materialkennwerten der Elemente. Die Elementlänge variiert nun über die Stablänge, so dass am linken Ende mit dem großen Querschnitt lange Elemente entstehen, die dann immer kleiner werden. Die durchschnittliche Querschnittsfläche ändert sich entsprechend des konischen Verlaufs des Fachwerkstabes. Die Materialkennwerte bleiben konstant.

8 Elemente, unterschiedliche Länge			
$Element_i$	A_{mi}	L_i	$E \cdot (A_{mi}/L_i)$
1	8.129	41.575	586.578
2	5.154	24.546	629.919
3	3.397	14.491	703.264
4	2.360	8.555	827.586
5	1.748	5.051	1038.210
6	1.368	2.982	1376.258
7	1.173	1.761	1998.296
8	1.047	1.039	3023.099

Tabelle 3: Daten zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit acht Elementen unterschiedlicher Länge

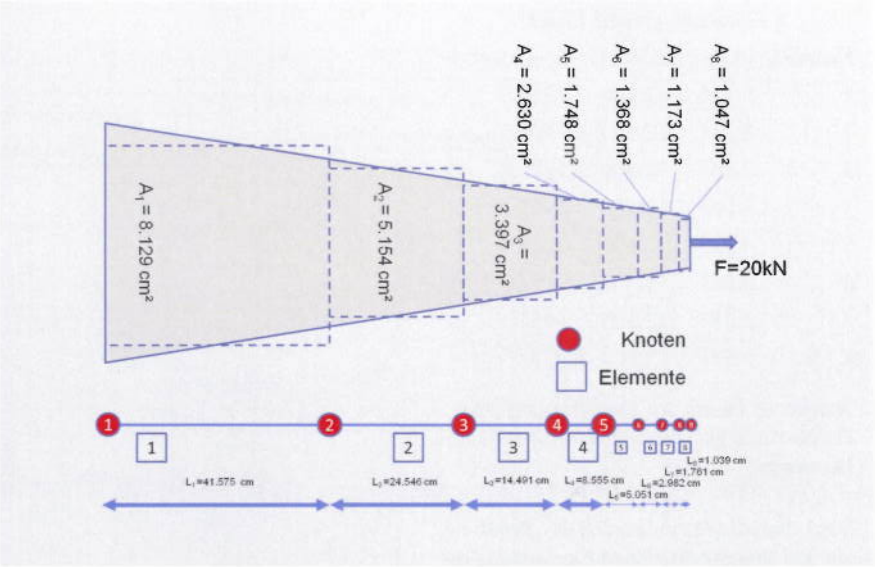


Bild 10: Diskretisierung des Fachwerkstabes mit acht unterschiedlich langen Elementen

Setzt man die Daten gemäß der *Tabelle 3* zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen ein, fügt die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen zum Gesamtgleichungssystem zusammen und löst es, erhält man den gesuchten Kontenverschiebungsvektor:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.03423 \\ 0.06611 \\ 0.09467 \\ 0.11893 \\ 0.13828 \\ 0.15287 \\ 0.16287 \\ 0.16949 \end{Bmatrix}$$

In *Bild 11* wird der Verschiebungsverlauf der theoretischen Lösung der FEM-Lö-

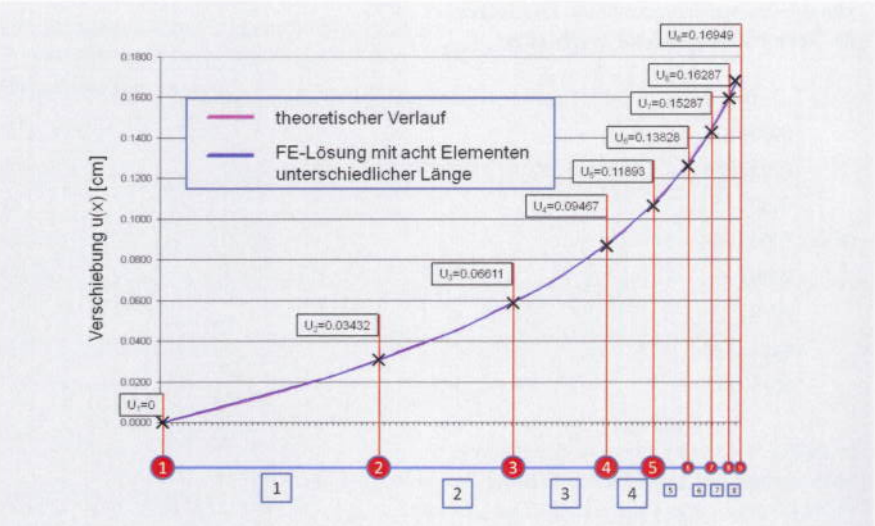


Bild 11: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen unterschiedlicher Länge mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Verschiebungen werden an den Stützstellen (Knoten, rote Kreise) ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der linearen Ansatzfunktion dargestellt.

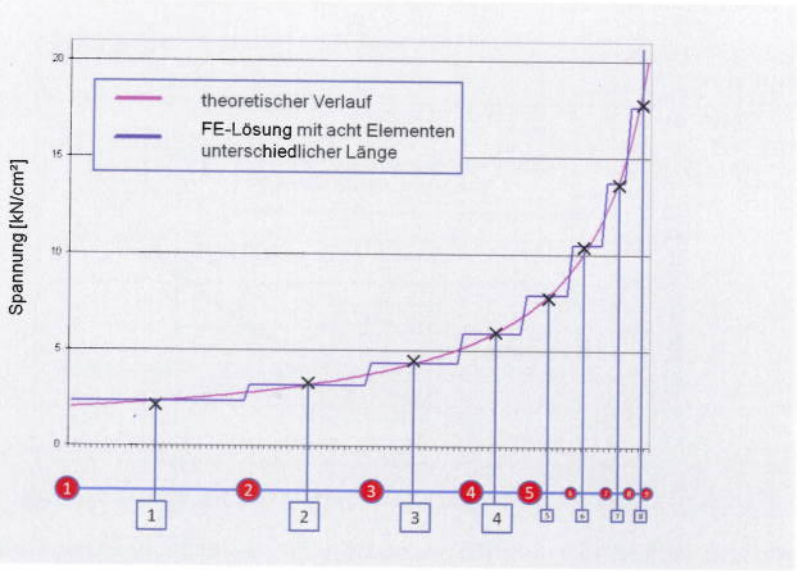


Bild 12: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen unterschiedlicher Länge mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Spannungen werden im Elementmittelpunkt (blaue Vierecke zwischen den Knoten) berechnet und sind über die Elementlänge konstant.

sung gegenübergestellt. Die Verschiebung kann mit der hier gewählten Diskretisierung sehr gut abgebildet werden.

Aus den Knotenverschiebungen werden die Spannungen in den acht Elementen berechnet. Die Ergebnisse der Spannungsberechnung sind in *Bild 12* dargestellt und werden wieder der „exakten" Lösung der analytischen Berechnung gegenübergestellt.

Man sieht, dass die Bereiche mit geringem Anstieg der Spannung (Spannungsgradient) auch mit der vergleichsweisen groben Diskretisierung abgebildet werden können. Die Ergebnisse mit hohem Spannungsgradienten lassen sich dagegen mit den kleineren Elementen besser abbilden. Trotzdem kann die maximale Spannung von 20 kN/cm² noch nicht getroffen werden. Um dies zu erzielen, müsste man insbesondere an der Spitze des Fachwerkstabes noch feiner vernetzen.

3.4 Ergebnissbewertung

Durch Erhöhung der Anzahl der Elemente kann eine Genauigkeitssteigerung erzielt werden. *Bild 12* zeigt, dass durch die Verdichtung der Elemente im Bereich hoher Spannungsgradienten die Ergebnisse einer FEM-Berechnung noch weiter verbessert werden können.

Es wird hier ausdrücklich betont, dass das gewählte Beispiel besonders kritisch für eine FE-Berechnung ist. Dieses Beispiel wurde bewusst ausgewählt, um den Approximationscharakter der FEM herauszustellen. Im Allgemeinen können mit relativ wenigen Elementen bereits gute Ergebnisse erzielt werden.

3.5 Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen (p-Adaptivität)

Der Vollständigkeit wegen sollen hier noch die sogenannten quadratischen Elemente vorgestellt werden. Denn eine Verbesserung der Ergebnisse kann nicht nur mit einer höheren Anzahl an Elementen erreicht werden, sondern auch mit Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion. Beim quadratischen Ansatz muss für die zusätzliche unbekannte Konstante (Freiheitsgrad) ein weiterer Knoten eingeführt werden. Dieser wird üblicherweise in der Mitte angenommen und auch als Mittenknoten bezeichnet.

Auf die Herleitung der quadratischen Ansatzfunktion und darauf aufbauend auf die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix wird verzichtet. Dies kann im Buch „FEM für Praktiker" nachgelesen werden. Hier sollen nur die charakteristischen Eigenschaften bzw. das charakteristische Verhalten dieser Elemente dargestellt werden.

Im *Bild 13* ist die Vernetzung des Fachwerkstabs mit zwei quadratischen Elementen dargestellt. Aus dem quadratischen Elementansatz ergibt sich, dass die Verschiebungsfunktion im Vergleich zu den linearen Elementen nun nicht mehr linear, sondern quadratisch ist. Die dafür zusätzlich benötigten Mittenknoten sind als grüne Kreise eingezeichnet.

Jedes Element hat in diesem Fall nun nicht mehr zwei unbekannte Verschiebungsgrößen u, sondern drei unbekannte Verschiebungsgrößen. Für das Element 1 sind das u_1, u_2 und u_3. Für das Element 2 sind das u_3, u_4 und u_5.

Für jedes Element ergibt sich dann eine 3 x 3-Elementsteifigkeitsmatrix. Im vorliegenden Fall sehen die Elementsteifigkeitsmatrizen für das Element 1 und 2 wie folgt aus:

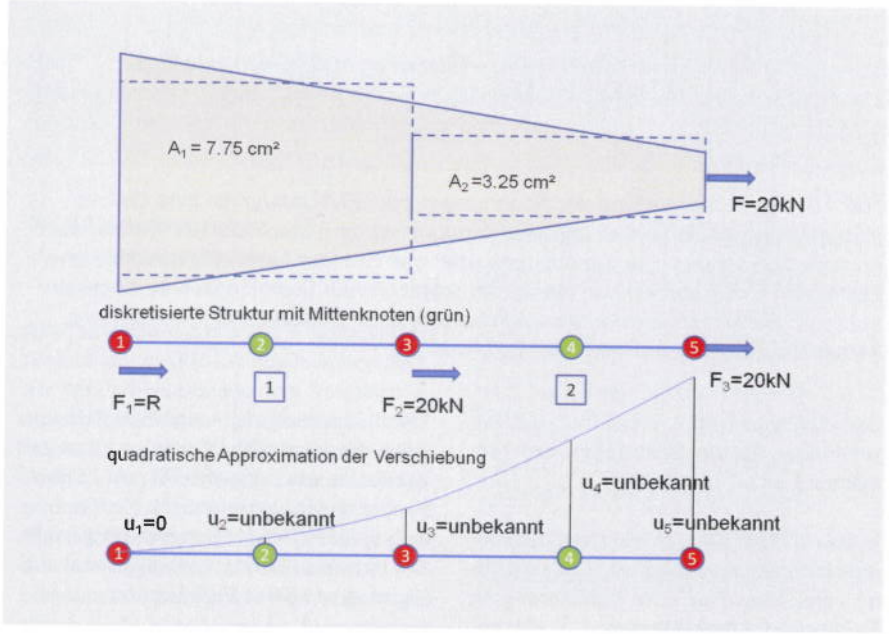


Bild 13: Vernetzung des Fachwerkstabes mit zwei sogenannten quadratischen Elementen die einen Mittenknoten (grüne Kreise) besitzen

Element 1

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 1265 & -1420 & 155 \\ -1420 & 2480 & -1060 \\ 155 & -1060 & 905 \end{bmatrix}$$

Element 2

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 635 & -700 & 65 \\ -700 & 1040 & -340 \\ 65 & -340 & 275 \end{bmatrix}$$

Die beiden Elementsteifigkeitsmatrizen können nun wieder zu einem Gesamtgleichungssystem, bestehend aus globaler Elementsteifigkeitsmatrix, Verschiebungsvektor und Kraftvektor, zusammengeführt werden:

$$\begin{bmatrix} 1265 & -1420 & 155 & 0 & 0 \\ -1420 & 2480 & -1060 & 0 & 0 \\ 155 & -1060 & 1540 & -700 & 65 \\ 0 & 0 & -700 & 1040 & -340 \\ 0 & 0 & 65 & -340 & 275 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Die Gleichungsauflösung liefert den gesuchten Verschiebungsvektor:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.018915 \\ 0.044254 \\ 0.084160 \\ 0.166320 \end{Bmatrix}$$

In *Bild 14* ist der Verschiebungsverlauf dargestellt. Aufgrund der quadratischen Elementansatzfunktion kann nun die Verschiebung über ein Element, also zwischen den Elementknoten 1 und 3 bzw. 3 und 5 quadratisch und damit exakter als mit einer linearen Funktion wiedergegeben werden.

Die Spannungen ergeben sich gemäß *Bild 15*. Im Gegensatz zu den linearen Elementen haben die quadratischen Elemente nun die Eigenschaft, dass die Spannungen nicht konstant über das Element sind, sondern einer linearen Funktion folgen. Bei den linearen Elementen wurde die Spannung in der Elementmitte berechnet. Im Falle der quadratischen Elemente werden die Spannungen an zwei Stellen innerhalb des Elementes berechnet und von dort an die Elementgrenzen, die Knoten, extrapoliert (blaue Kreise). In *Bild 15* sind diese Stellen als blaue Rechtecke dargestellt. Die Bezeichnung für die zwei Stützstellen

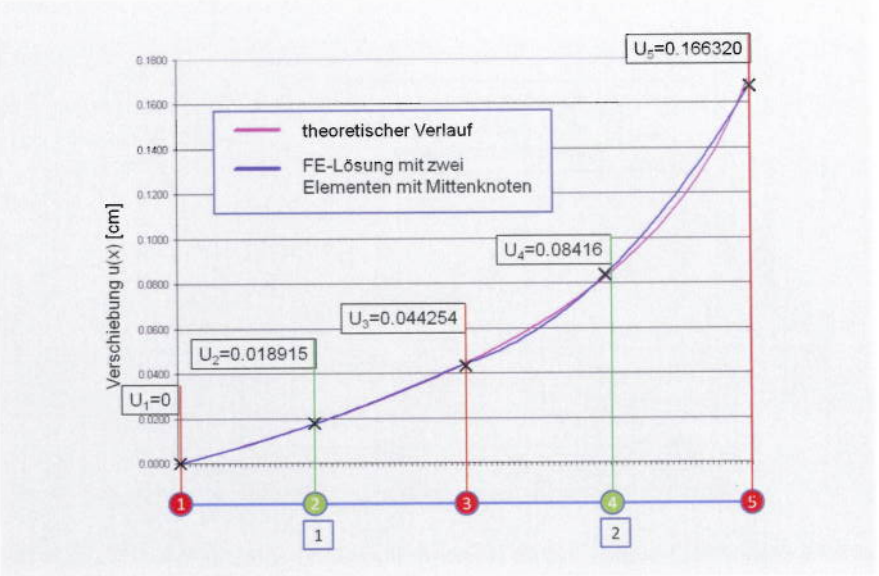


Bild 14: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit zwei Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Verschiebungen werden an den Stützstellen (Knoten, rote und grüne Kreise) ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der quadratischen Ansatzfunktion dargestellt.

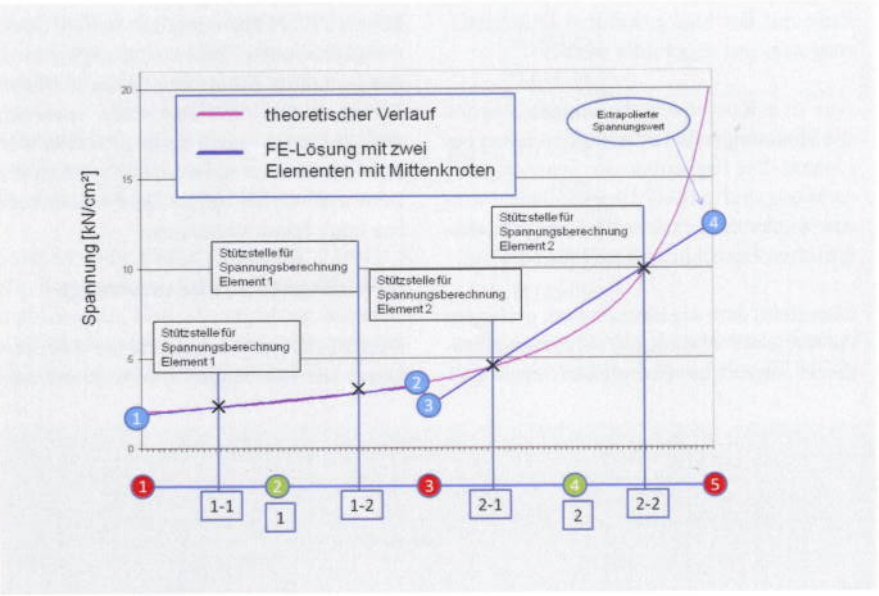


Bild 15: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit zwei Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung. Die Spannungen über das Element laufen bei quadratischen Elementen linear und können damit den tatsächlichen Spannungsverlauf besser abbilden. Berechnet werden die Spannungen an zwei Stützstellen pro Element, von dort werden sie auf die Knoten extrapoliert.

des Elemente 1 ist 1-1 und 1-2, die Bezeichnung für die Stützstellen des Elementes 2 ist 2-1 und 2-2.

In *Bild 15* lässt sich gut erkennen, dass bereits mit zwei quadratischen Elementen eine vergleichsweise gute Annäherung an die „exakte" Lösung gelingt.

Durch Erhöhung der Anzahl der Elemente kann die Genauigkeit wieder gesteigert werden. In den folgenden *Bildern 16* bis *19* ist dies wieder exemplarisch für vier bzw. acht quadratische Elemente dargestellt. Die einzelnen Diskretisierungen sind analog zu den anderen Beispielen.

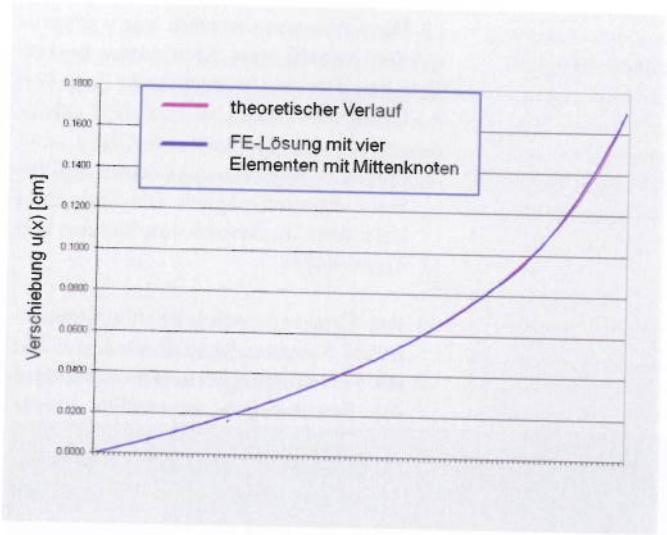


Bild 16: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit vier Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung

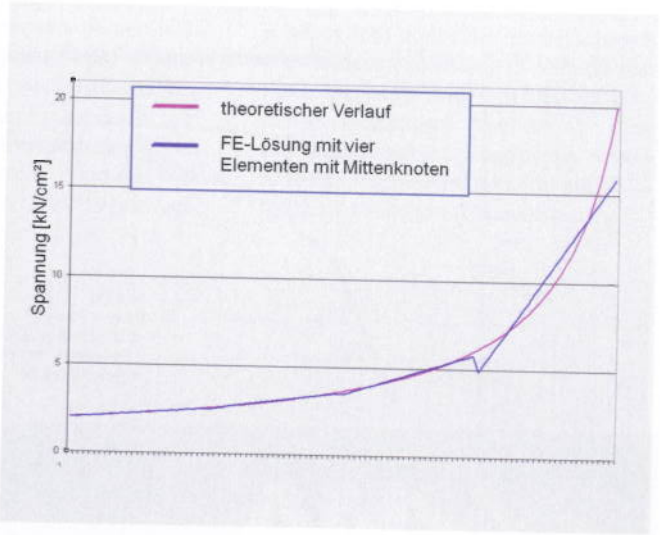


Bild 17: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit vier Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung

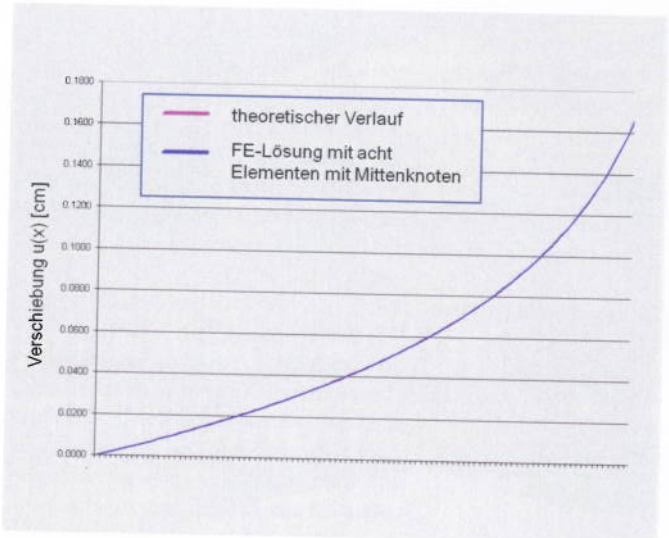


Bild 18: Gegenüberstellung der Verschiebung der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung

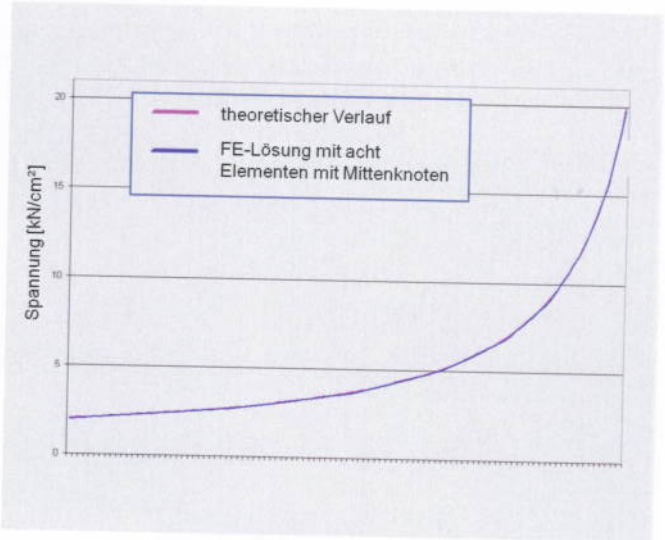


Bild 19: Gegenüberstellung der Spannungen der FEM-Lösung für eine Diskretisierung mit acht Elementen mit Mittenknoten mit dem theoretischen Verlauf der analytischen Lösung

4 Konvergenzbetrachtung

Abschließend werden die Ergebnisse der verschiedenen FE-Lösungen untereinander verglichen, um aus dem Vergleich einige Schlussfolgerungen zu ziehen.
In der folgenden *Tabelle 4* sind die maximalen Verschiebungen am Stabende gegenüber gestellt. In *Bild 20* sieht man, wie die Genauigkeit der Ergebnisse (hier die Verschiebung) mit wachsender Elementanzahl gesteigert wird. Aufgetragen sind sowohl Ergebnisse für Elemente mit

Elemente	linearer Ansatz	quadratischer Ansatz	exakte Rechnung
1	0.121212	0.156028	0.170562
2	0.145581	0.166320	0.170562
3	0.155437	0.168859	0.170562
4	0.160463	0.169750	0.170562
5	0.163371	0.170128	0.170562
6	0.165199	0.170310	0.170562
7	0.166419	0.170407	0.170562
8	0.167272	0.170461	0.170562
8 (ungleiche Länge)	0.16949	-	0.170562

Tabelle 4: Maximale Verschiebungen u(x) am Stabende [cm]

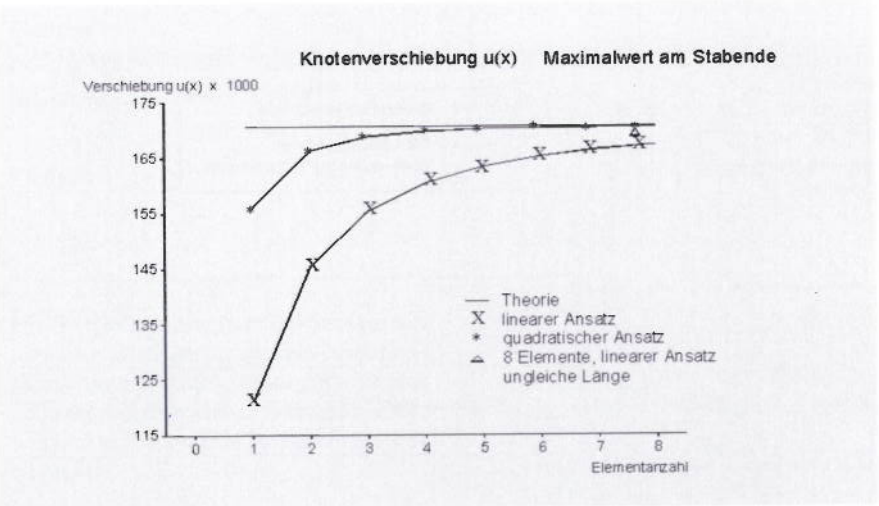


Bild 20: Maximalwerte der Knotenverschiebung u(x)

linearem Ansatz als auch für Elemente mit quadratischem Ansatz. Entsprechend werden in *Tabelle 5* und in *Bild 21* die Spannungen verglichen.

Aus den *Bildern 20* und *21* lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen, die hier anhand des einfachen Beispiels aus der Methode abgeleitet werden können. Mit diesen „Statements" werden die wesentlichen Eigenschaften der FEM zusammengestellt. Sie sind im technischen Alltag überwiegend zutreffend und können meistens zur Planung einer Berechnung verwendet werden.

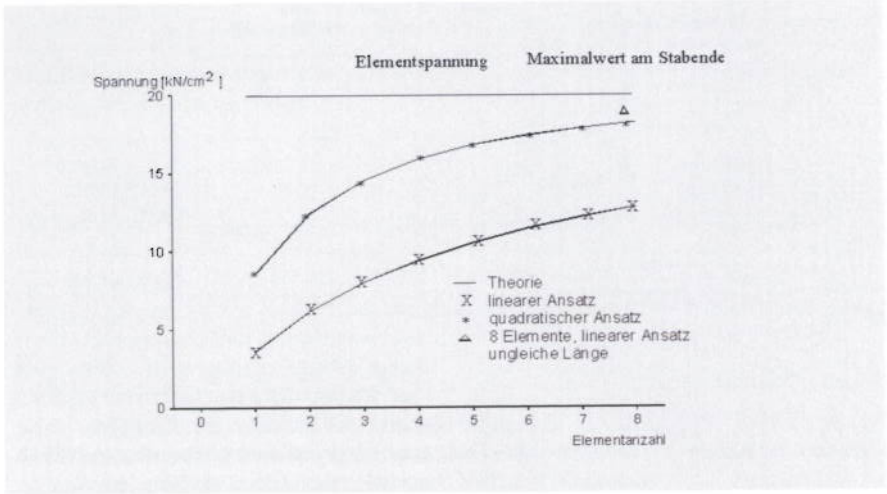


Bild 21: Maximalwerte der Elementspannung σ (x)

Elemente	linearer Ansatz	quadratischer Ansatz	exakte Rechnung
1	3.636	8.511	20.000
2	6.154	12.394	20.000
3	8.000	14.545	20.000
4	9.412	15.878	20.000
5	10.526	16.766	20.000
6	11.429	17.391	20.000
7	12.174	17.849	20.000
8	12.800	18.194	20.000
8 (ungleiche Länge)	19.11	-	20.000

Tabelle 5: Maximale Elementspannung $\sigma_e(x)$ am Stabende [kN/cm²]

1. **Die Ergebnisse werden mit wachsender Anzahl von Elementen besser.** Aber: Durch die wachsende Zahl von Elementen verlängern sich die Rechenzeiten. Im praktischen Alltag sind durchaus Modelle mit einigen Millionen Elementen möglich. Die Rechenzeit kann dann im Bereich von Stunden und Tagen liegen.

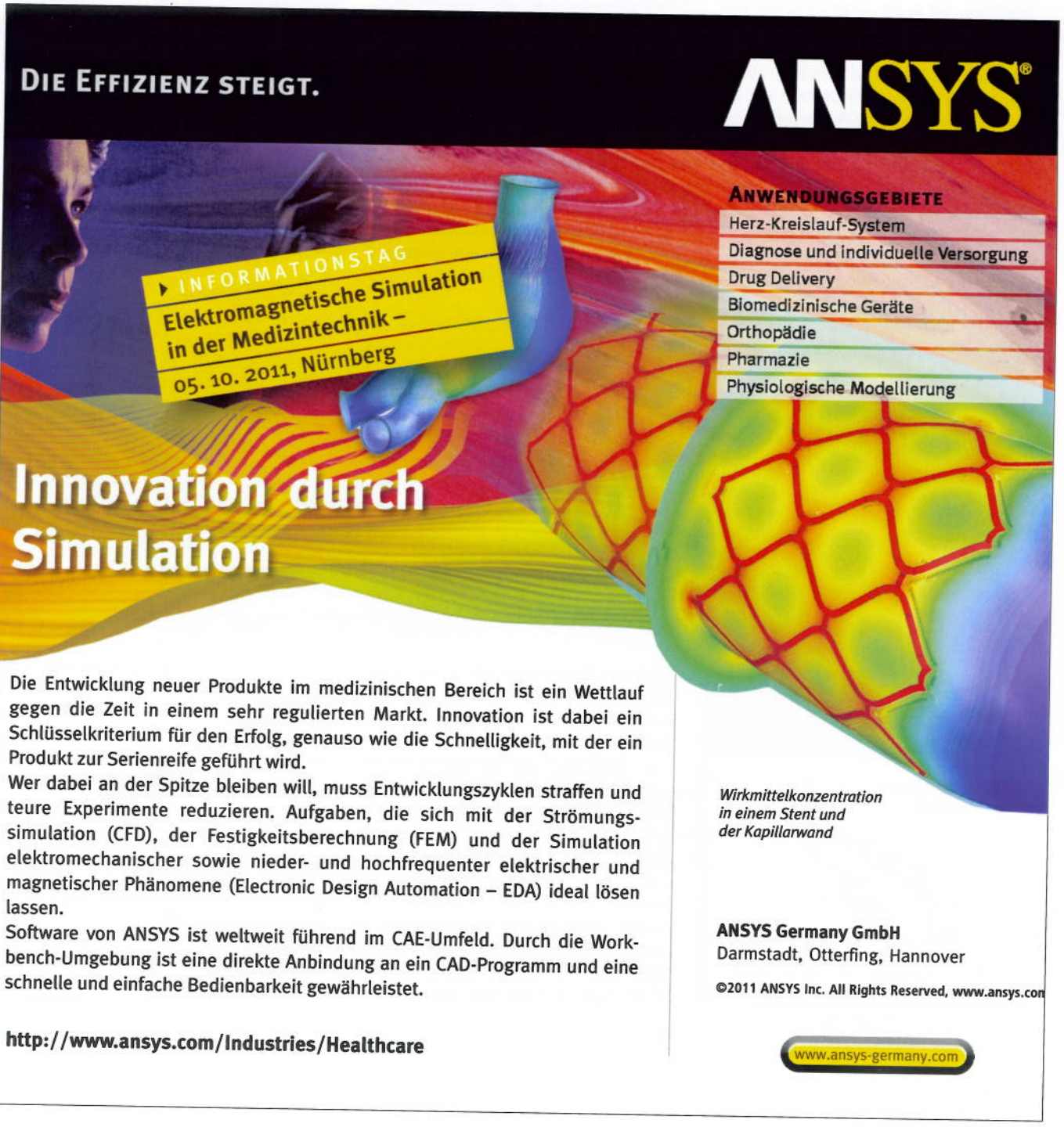
2. **Bei Elementverdichtung im Bereich hoher Spannungsgradienten werden die Verschiebungen und insbesondere die Spannungen wesentlich besser wiedergegeben.** Viele Elemente zu verwenden ist die „rohe" Methode, um die Ergebnisse zu verbessern. Effektiver für die Genauigkeit sind viele Elemente an den Stellen des Bauteils, an denen hohe Spannungsgradienten vorliegen bzw. erwartet werden.

3. **Quadratische Ansätze liefern bessere Ergebnisse als lineare Ansätze.** Prinzipiell ist diese Aussage richtig und quadratische Elemente sind den linearen Elementen vorzuziehen. Im Ingenieursalltag haben jedoch bei Plastizität, Kontakt und anderen Nichtlinearitäten die „einfachen" Elemente mit linearen Ansätzen Vorteile, so dass die linearen Elemente nach wie vor eine starke Anwendung finden.

4. **Die Konvergenz für Elemente mit quadratischen Ansätzen ist schneller.** Diese Eigenschaft ist nur selten wichtig, denn nur vereinzelt werden für eine Aufgabe mehrere Vernetzungen verwendet und die Konvergenz untersucht. Meistens wird aus Zeitgründen eine Vernetzung mit einer Elementanzahl gewählt, die in Bezug auf die Rechenzeit akzeptabel ist und deren Ergebnis für die technische Aussage zugrunde gelegt wird.

5. **An den Elementgrenzen sind die Verschiebungen stetig, die Spannungen weisen aber Sprünge auf (Näherungscharakter der FEM!).** Dies ist ein ganz wichtiger Punkt, der bei der Auswertung der Ergebnisse oft nicht erkannt wird. Bei der Darstellung der Ergebnisse im FEM-Programm wird standardmäßig meist eine Mittelung der Spannungen an den Elementgrenzen vorgenommen, und erst dieser gemittelte Wert wird auf dem Bild dargestellt. Dies sieht für das Auge zwar schöner aus, es bedeutet aber auch, dass der graphisch dargestellte Wert nicht dem tatsächlich im Element berechneten Wert

entspricht. Dies kann insbesondere bei einer groben Vernetzung zu einer falschen Einschätzung der Ergebnisse führen. Das geschilderte „Verschmieren" der Ergebniswerte wird allgemein anerkannt und als praktikable Lösung akzeptiert.

6. **Verschiebungen werden besser wiedergegeben als Spannungen (Spannungen sind abgeleitete Größen).** Dies liegt daran, dass die Spannungen von den Verschiebungen im mathematischen Sinne abgeleitet werden. Sind die Verschiebungen linear (lineare Elementansatzfunktion) ergibt die mathematische Ableitung einen konstanten Wert, der der Spannung entspricht. Sind die Verschiebungen quadratisch (quadratische Elementansatzfunktion), ergibt die Ableitung eine lineare Funktion, was einem linearen Spannungsverlauf entspricht.

Anzeige