3 Analoge Feldanwendungen

3.1 Einleitung

Es werden Anwendungsmöglichkeiten beschrieben, die zwar andere physikalische Felder betreffen, die jedoch auch mit der FEM einfach gelöst werden können, da die zugrundeliegenden Gleichungen analog aufgebaut sind. Die Gleichungen werden genannt und die Analogie durch Gegenüberstellung mit den Größen der Temperaturfelder deutlich gemacht.

3.2 Grundlagen

Die im vorangegangenen Abschnitt erarbeiteten Gleichungen gelten für die Probleme der Temperaturfelder. Es sollen hier die Gleichungen der stationären Temperaturfelder weiterverwendet werden, um analoge, ähnliche physikalische Aufgabenstellungen zu diskutieren und eine Vorgehensweise anzubieten, auch solche Aufgabenstellungen zu lösen. Dazu müssen nur bereits bekannte Größen mit neuen Bedeutungen versehen werden, Bezeichnungen "übersetzt" bzw. substituiert werden - und schon kann diese analoge Aufgabe mit dem Finite-Element-Programm gelöst werden!

Die Grundlage der stationären Temperaturfelder ist die quasiharmonische Differentialgleichung, die in Abschnitt 2.2 (2.2.1) genannt war:

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\lambda_2\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\lambda_3\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial t}+f_{(x,y,z)} \tag{3.2.1}$$

Für die Analogien legen wir eine umgeformte Schreibweise der Gleichung zugrunde:

$$\nabla\left(\lambda\nabla T\right)=-q''' \tag{3.2.2}$$

Hierbei bedeuten

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k \tag{3.2.3}$$

λ Leitfähigkeit [W / (mk)]
T Temperatur [k]
q''' innere Wärmeerzeugungsrate [W / m³]
(heat generation rate per unit volume)

Der Nabla-Operator □ stellt die örtliche Ableitung in Richtung der Raumkoordinaten dar. Daraus zeigt sich, dass bei raumrichtungsabhängigen Leitfähigkeiten - also anisotropem Material, d. h. λ = (λ_x, λ_y, λ_z) - die oben gewählte Schreibweise unumgänglich ist, da in diesem Fall im allgemeinen ebenso die örtlichen Ableitungen der Leitfähigkeiten raumrichtungsabhängig sind. Nur bei isotropen, also raumrichtungsunabhängigen Eigenschaften kann die Gleichung in

$$\lambda\left(\nabla^2 T\right)=-q''' \tag{3.2.4}$$

umgeschrieben werden und die Leitfähigkeit zusammengefasst werden.

Bei den nunmehr untersuchten analogen Anwendungen liegt im wesentlichen weiterhin diese Gleichung zugrunde. An die Stelle der Wärmeleitfähigkeit treten jedoch andere Materialeigenschaften, die die Durchlässigkeit, den Widerstand oder andere Eigenschaften des Werkstoffes beschreiben. Anstelle der Temperatur ist eine Potentialfunktion einzusetzen, also eine im Bauteil verteilte Größe in der Art einer potentiellen Energie. Auf der rechten Seite sind üblicherweise äußere Effekte zusammengefasst, durch die das untersuchte Feld hervorgerufen wird. In dieser allgemeinen Bedeutung erkennen wir die Gleichung als Poisson-Differentialgleichung

$$\nabla\left(\lambda\nabla\phi\right)=R \tag{3.2.5}$$

mit

∇ Nabla-Operator
λ Leitfähigkeit
φ Potentialfunktion
R Rechte Seite

Für manche physikalischen Effekte ergibt sich als Sonderfall dieser Gleichung die Laplace-Differentialgleichung:

$$\nabla\left(\lambda \nabla \phi \right) = 0 \tag{3.2.6}$$

Mit der Poisson-Differentialgleichung kann eine Vielzahl von stationären physikalischen Vorgängen beschrieben werden, wie z. B.

- Temperaturfeld, Wärmeübertragung
- Elektrostatisches Feld
- Elektrische Leitung (Gleichstrom, Gleichspannung)
- Sickerströmung
- Torsion von Wellen oder langen, schlanken Profilen
- Potentialströmung (reibungsfrei, inkompressibel)
- Diffusion
- vorgespannte Membran, Seifenhaut
- Magnetostatik
- Schwinden, Trocknen von Holz
- Wellenschlag, Oberflächenwellen von flachen Gewässern
- Druckverteilung in einem Schmierfilm

und andere.

Bei zeitlich veränderlichen Vorgängen treten zusätzliche Effekte auf, die nicht mehr direkt analog zu anderen physikalischen Anwendungen vergleichbar sind. Hierzu zählen zum Beispiel

- beim Temperaturfeld die Auswirkung der Wärmekapazität, also des Speichervermögens des Materials, sowie eventuell von Phasenwechselvorgängen,
- beim elektrischen Feld die Wechselwirkung mit Magnetfeldern (Induktionsgesetz, Maxwellgleichungen)

und andere. Die Untersuchung dieser transienten, zeitlich veränderlichen Vorgänge bei anderen Feldeffekten gehen über den Umfang dieses Buches hinaus und werden hier nicht weiterverfolgt.

In der Literatur finden sich zahlreiche Hinweise auf die Analogie der hier dargestellten physikalischen Probleme. In vielen Fällen sind jedoch nur einzelne der Analogien dargestellt. Im einzelnen können weitere Hinweise gefunden werden unter anderem bei

- Hering, Martin, Stohrer /2/, S. 108, S. 203
- Cerbe, Hoffmann /3/, S. 292
- Knothe, Wessels /4/, S. 70
- Schwarz /5/, S. 11
- Zienkiewicz /6/, S. 423
- Bathe /7/, S. 109, S. 460
- Kardestuncer /8/, S. 2.34

3.3 Elektrostatisches Feld

Die Differentialgleichung für das elektrostatische Feld lautet

$$\nabla\left(\varepsilon \nabla \phi \right) = -\rho \tag{3.3.1}$$

mit

ε	Permittivität, Dielektrizität (permittivity)
φ	Potential (potential)
ρ	Ladungsdichte (charge density)

Die SI-Einheiten lauten für die Dielektrizität ε [A s / (V m)], für das Potential φ [V] und für die Ladungsdichte ρ (charge density) [A s / m³].

Aus dem Vergleich der Differentialgleichungen sind die Analogien zwischen dem elektrostatischen Feld und dem Temperaturfeld erkennbar: die Dielektrizität ε entspricht der

Wärmeleitfähigkeit λ, das Potential φ entspricht der Temperatur T und die Ladungsdichte ρ entspricht der Wärmequellrate q'''.

Eine der maßgebenden Größen des elektrostatischen Feldes ist die Feldstärke (electric field intensity), die aus dem Gradienten des Potentials berechnet wird nach

$$E = -\nabla \phi = -grad\, \phi \tag{3.3.2}$$

Die SI-Einheit der Feldstärke ist E [V / m]. Bei der analogen Anwendung steht die Feldstärke als Gradient der Temperatur grad T (ANSYS-Benennung: TG) zur Verfügung.

Aus der Feldstärke ergibt sich die Verschiebungsdichte D (electric current density oder electric displacement) (SI-Einheit D [A s / m²]) durch Multiplikation mit der Dielektrizität zu

$$D = \varepsilon \cdot E = -\varepsilon \cdot \nabla \phi \tag{3.3.3}$$

Die zur Verschiebungsdichte analoge Größe des Temperaturfeldes ist die Wärmestromdichte (ANSYS-Benennung TF).

Eine wichtige Größe des elektrostatischen Feldes stellt die Ladung im Feld dar. Rechnerisch kann die Ladung im Feld durch eine Integration der Verschiebungsdichte bestimmt werden.

Bei einer 3-dimensionalen Berechnung ergibt diese Integration über der Oberfläche eines Volumens die in diesem Volumen eingeschlossene Ladung

$$Q = \oint D\, dA \tag{3.3.4}$$

Bei einer 2-dimensionalen Berechnung (bei der alle Berechnungsgrößen auf eine Einheits-Tiefe bezogen sind) ergibt sich die Ladung in einem Gebiet durch eine Integration auf einem Weg, der dieses Gebiet umschließt

$$\frac{Q}{l} = \oint D\, d\, s \tag{3.3.5}$$

Dabei ist l die Länge des Integrationsweges. In Größen des Temperaturfeldes "übersetzt" ergibt sich

$$\frac{Q}{l} = \oint D ds = \oint TF\, ds = kxx \cdot TG\, ds \tag{3.3.6}$$

Damit ist der direkte Bezug zu den ANSYS-internen Bezeichnungen gegeben und die analoge Anwendung problemlos möglich.

Die Kapazität C (capacitance) der Anordnung kann direkt aus der Ladung Q bzw. Q/l berechnet werden über die angelegte Spannung U. Diese Spannung ist die vorgegebene Potentialdifferenz und entspricht - in das Temperaturfeld "übersetzt" - den als Randbedingungen vorgegebenen Temperaturdifferenzen _T_o

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Delta T_o} \tag{3.3.7}$$

Die SI-Einheiten lauten für die Ladung Q [A s] oder Q [C] und für die Kapazität [A s / V] oder C [F]. Die Dielektrizität von technischen Werkstoffen wird vielfach als relative Dielektrizität angegeben, bezogen auf die Dielektrizität von Luft ε_o = 8,854 □ 10^{-12} [A s / (V m)].

Elektrostatisches Feld	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
φ Potential	T Temperatur	TEMP
ε Dielektrizität	λ Leitfähigkeit	KXX
ρ Ladungsdichte	q''' Wärmeerzeugung	HGEN
E Feldstärke	_T Temperaturgradient	TG
D Verschiebungsdichte	q'' Wärmestromdichte	TF

Tab. 3.3-1 Analogie elektrostatisches Feld und Temperaturfeld

3.4 Elektrische Leitung

Bei der elektrischen Leitung legen wir den Stromfluss in einem elektrischen Leiter bei einer angelegten Gleichspannung zugrunde. Hierfür trifft die Differentialgleichung zu:

$$\nabla\left(\sigma\,\nabla\phi\,\right)=0 \tag{3.4.1}$$

mit

σ elektrische Leitfähigkeit (electrical conductivity)
φ Potential

Diese Gleichung vom Laplace-Typ stellt einen Sonderfall der Poisson-Gleichung dar, die als Grundlage dieser Potentialfelder genannt war, Gl. (3.2.6).

Wenn die Verteilung des Potentials φ (bzw. der elektrischen Spannung) im Bauteil berechnet ist, kann daraus die Stromdichte im Bauteil aus dem örtlichen Gradienten des Potentials bestimmt werden über

$$i=-\sigma\cdot\nabla\phi \tag{3.4.2}$$

Dabei ist i die Stromdichte in Richtung des Potentialgradienten, also der Strom bezogen auf eine Fläche, die senkrecht zur Richtung des Gradienten angeordnet ist.

Die elektrische Leitung im Material kann im ANSYS-Programm sowohl direkt unter Verwendung von elektrischen Namen der Variablen als auch "übersetzt" als Potentialfeld mit thermischen Namen der Variablen verwendet werden. Diese beiden Feldeffekte unterscheiden sich von den anderen, analogen Anwendungen insofern, als zahlreiche technische Fragestellungen vorliegen, bei denen beide Effekte zugleich auftreten und zusätzlich noch ein gegenseitiger Einfluss besteht. Beispiele dazu sind alle elektrischen Maschinen, in denen durch eine angelegte Gleichspannung ein elektrischer Strom fließt (die Potentialverteilung sowie die Ströme und Stromdichten sind als elektrisches Leitungsfeld zu berechnen) und durch den Strom eine Wärmeerzeugung durch Stromwärmeverluste im Material auftritt. Die Temperaturverteilung aufgrund dieser Wärmeerzeugung und anderen Randbedingungen, durch die die Wärme abfließt, ist als Temperaturfeld zu berechnen. Die Kopplung beider Felder erfolgt somit über die fließenden Ströme oder Stromdichten im Material und die elektrische Leitfähigkeit.

Bei den heutzutage verfügbaren Computerleistungen ist es durchaus üblich, in einer Finite-Element-Berechnung unterschiedliche physikalische Effekte gekoppelt zu berücksichtigen. Dabei wird vielfach im gleichen FE-Modell des Bauteils neben der Berechnung des elektrischen Leitungsfeldes und des Temperaturfeldes zusätzlich auch noch das Magnetfeld und die mechanischen Spannungen und Verformungen untersucht. Da alle diese Effekte auch noch gegenseitige Einwirkungen und Rückwirkungen enthalten können, ist eine programminterne und vollautomatische Kopplung der einzige Weg, um solche Aufgaben in vertretbarer Zeit zu lösen.

Elektrische Leitung	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
φ elektrisches Potential σ elektrische Leitfähigkeit i elektrische Stromdichte	T Temperatur λ Leitfähigkeit q'' Wärmestromdichte	TEMP KXX TF

Tab. 3.4-1 Analogie elektrische Leitung und Temperaturfeld

Elektrische Leitung	ANSYS-Programm
φ elektrisches Potential (Spannung) 1/σ elektrischer Widerstand	VOLT RSVX

Tab. 3.4-2 Direkte Berechnung der elektrischen Leitung bei gekoppelten Feldern

3.5 Sickerströmung

Für die Sickerströmung (seepage, flow through porous media) ist folgende Differentialgleichung zugrundezulegen

$$\nabla\left(k\,\Delta H\right) = -Q \tag{3.5.1}$$

mit

k Permeabilität der Transmissivität (permeability coefficient)
H Porendruck (fluid head)
QQ Durchflussleistung

Zusätzlich zu dieser Gleichung ist jedoch bei der Sickerströmung vielfach eine Abhängigkeit von der geodätischen Höhe y gegeben. Dort gilt H = y. Zur Abbildung dieser freien Oberflächen muss entweder iterativ das Modell so geändert werden, dass alle Geometriebereiche oberhalb der Sickergrenze entfernt werden. Altenativ hierzu kann eine Permeabilität definiert werden, die abhängig vom Porendruck H und damit nichtlinear ist.

Sickerströmung	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
H Porendruck k Permeabilität Q Durchflussleistung	T Temperatur λ Leitfähigkeit q''' Wärmeerzeugungsrate	TEMP KXX HGEN

Tab. 3.5-1 Analogie Sickerströmung und Temperaturfeld

3.6 Torsion von Wellen oder Profilen

Die hier dargestellte Analogie betrifft eine Problematik aus der Festigkeitslehre und der Strukturmechanik. Untersucht wird die Torsion von langgestreckten, schlanken Bauteilen wie z. B. Maschinenwellen, Achsen und Stahlprofilen des Stahlbaus.

Unter der Voraussetzung, dass eine Verwölbung des Profils nicht auftritt und reine St. Venantsche Torsion vorliegt, kann eine Poisson-Differentialgleichung abgeleitet werden, die die Verteilung der Schubspannungen im Querschnitt repräsentiert

$$\nabla\left(\frac{1}{G}\nabla\phi\right) = -2\theta \tag{3.6.1}$$

Darin sind

G der Gleitmodul des Materials
Θ der Verdrehwinkel, Verwindung des Querschnitts

und φ eine Spannungsfunktion, die mit den Schubspannungen zusammenhängt

$$\tau_{yz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{3.6.2}$$

Mit dieser Analogie ist also die Verteilung der Schubspannungen in einem Querschnitt eines Profils berechenbar, das mit einem Torsionsmoment belastet ist und verdreht ist.

Der Gleitmodul kann aus dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktion v berechnet werden nach

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{3.6.3}$$

Bei dieser Aufgabe liegt die Randbedingung vor, dass am Rand des Querschnitts die Schubspannungen senkrecht zum Rand verschwinden müssen.

In der analogen Anwendung wird das Potential wie eine Temperatur behandelt, der Gleitmodul wird als Reziprokwert anstelle der Wärmeleitfähigkeit eingesetzt. Die Verwindung des Querschnitts entspricht einem Quellterm im thermischen Modell, also einer Wärmeerzeugungsrate q'''. Die oben erwähnte Randbedingung betrifft die Schubspannungen, also den Gradienten der Spannungsfunktion. Zur Erfüllung dieser Randbedingung muss um den Rand herum das

Potential den gleichen Wert haben. Dies bedeutet, dass als Randbedingung im analogen thermischen Modell alle Temperaturen am Modellrand auf einen Wert festgehalten werden, jedoch ist der Zahlenwert nicht von Bedeutung. Üblicherweise wird am Rand die Temperatur auf Null vorgeschrieben.

Die analoge Abbildung dieser Aufgabenstellung ist für geschlossene Vollquerschnitte damit problemlos möglich. Wenn ein geschlossenes, aber hohles Profil abzubilden ist, muss am Innenrand ein einheitliches Potential erzwungen werden, so dass auch dort die vorgenannte Randbedingung der Schubspannungsfreiheit erfüllt ist. Durch eine Verknüpfung bzw. Kopplung des Potentials am Innenrand (ANSYS-Kommandos CP) wird diese Bedingung des Potentialgradienten erfüllt. Es erfolgt dadurch eine gegenseitige Kopplung des Potentials auf einen noch zu berechnenden Wert (ein verbleibender Freiheitsgrad). Diese Kopplung bewirkt nicht, dass eine unzulässige zusätzliche Festlegung der tatsächlichen Höhe des Potentials am Innenrand eingeprägt wird.

Wellentorsion	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
φ Spannungsfunktion	T Temperatur	TEMP
1/G Gleitmodul (Kehrwert)	λ Leitfähigkeit	KXX
2θ Verdrehung	q''' Wärmeerzeugungsrate	HGEN
τ Schubspannung	_T Temperaturgradient	TG

Tab. 3.6-1 Analogie Wellentorsion und Temperaturfeld

3.7 Potentialströmung

Die Überschrift bezeichnet bereits die hier zugrundegelegte Strömung als Potentialproblem. Obwohl eine solche Strömung als reibungsfrei und inkompressibel vorausgesetzt wird und damit eine weitgehende Idealisierung von realen Strömungen vorliegt, sind doch grundlegende Erkenntnisse und qualitativ weiterverwendbare Ergebnisse zu erzielen.

Mit diesem Ansatz lassen sich nicht nur Strömungen in Maschinen, Turbinen, Pumpen oder in der Anlagentechnik berechnen. Von Kardestuncer /8/ wird auf weitere vielfältige Anwendungsmöglichkeiten der FEM auf Fluidberechnungen hingewiesen: Meeresströmungen in Küstenregionen oder Hafenanlagen oder transiente Wellenbewegungen wie Tsunamis.

Die für diese Probleme zugrundeliegende Differentialgleichung lautet:

$$\nabla\left(\nabla\phi\right)=0 \qquad (3.7.1)$$

mit φ als Potentialfunktion (potential function) oder

$$\nabla\left(\nabla\psi\right)=0 \qquad (3.7.2)$$

mit ψ als Stromfunktion (stream function) [SI-Einheit: m² / s].

Die Geschwindigkeitskomponenten in der Strömung ergeben sich aus dem Gradienten der Feldfunktion. Im Fall der Potentialfunktion gilt hierfür

$$u_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad u_y=\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (3.7.3)$$

und im Fall der Stromfunktion

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad u_y=\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3.7.4)$$

Bei der Berechnung einer Potentialströmung mit Hilfe der thermischen Analogie ist der für die Material-Leitfähigkeit eingesetzte Zahlenwert bedeutungslos. Bei der Finite-Element-Analyse kann hierfür ein beliebiger Wert größer Null eingesetzt werden. Die Potential- und die Geschwindigkeitsverteilung sind nur abhängig von den Randbedingungen.

Diese Randbedingungen an den Ein- und Ausströmquerschnitten sowie an den Wänden, die die

Strömung begrenzen, sind je nach Verwendung der Potentialfunktion- oder Stromfunktion-Formulierung unterschiedlich.

Im allgemeinen wird die Potentialfunktion-Formulierung bevorzugt. Damit findet die Strömung vom Ort des hohen Potentials zum niedrigen Potential hin statt. Kanalwände, die die Strömung begrenzen, erfordern keine besonderen Randbedingungen. Sie entsprechen einer adiabaten Begrenzung in der thermischen Analogie.

Bei der Verwendung der Stromfunktion-Formulierung gilt für die begrenzenden Kanalwände, dass entlang der Wand der Wert der Stromfunktion konstant ist. Wenn wir uns als Beispiel einen Strömungskanal vorstellen, der von links nach rechts durchströmt wird, so stellen jeweils die obere und untere Begrenzungswand Linien gleichen Stromfunktionswertes dar. Sie sind damit nichts anderes als Stromlinien. Dies gilt für den gesamten untersuchten Kanalquerschnitt: Linien gleicher Stromfunktion sind Stromlinien. In der thermischen Analogie sind damit in unserem Beispiel am oberen Rand eine einheitliche Temperatur vorzugeben, am unteren Rand eine andere, ebenso einheitliche Temperatur. Die Stromlinien ergeben sich als Linien gleicher Temperatur im Berechnungsquerschnitt. Wenn sich ein umströmter Körper im Kanal befindet (ein Hindernis wie etwa eine Ventilklappe), so ist am Rand des Hindernisses ein einheitlicher Wert der Stromfunktion zu erzwingen, also die Freiheitsgrade am Rand des Hindernisses miteinander zu koppeln.

Ein- und Ausströmquerschnitte erfordern bei der Verwendung der Stromfunktion-Formulierung keine besonderen Randbedingungs-Vorgaben.

Strömung	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
<u>Potentialfunktion:</u>		
φ Potential	T Temperatur	TEMP
	1 Einheitswert	KXX
u_x, u_y Geschwindigkeit	_T Temperaturgradient	TG
<u>Stromfunktion:</u>		
ψ Stromfunktion	T Temperatur	TEMP
	1 Einheitswert	KXX
u_x, u_y Geschwindigkeit	_T Temperaturgradient	TG

Tab. 3.7-1 Analogie Potentialströmung und Temperaturfeld

3.8 Diffusion

Bei der Diffusion wird das Verhalten von Flüssigkeitsbereichen mit unterschiedlichen Konzentrationen untersucht. Vorgänge dieser Art sind zum Beispiel in der Zellbiologie, bei der Gasdiffusion in Filtern oder beim Trocknen von Holz zu untersuchen. Die zugrundeliegende Differentialgleichung kann geschrieben werden als

$$\nabla^2 \left(DC \right) = \frac{\partial c}{\partial t} \tag{3.8.1}$$

mit

C Konzentration der Flüssigkeit
D Diffusionskoeffizient

Diese Gleichung ist als das 2. Fick'sche Gesetz bekannt. Die dargestellte Gleichung enthält durch die zeitliche Ableitung der Konzentration auf der rechten Seite die Möglichkeit, auch transiente Diffusionsvorgänge wiederzugeben.

Bei Diffusionsproblemen ist vielfach noch zusätzlich eine Größe von Interesse, die bei einer numerischen Lösung aus der berechneten Konzentrationsverteilung (Potentialverteilung) abgeleitet werden kann. Dies ist der Massenstrom oder die Diffusionsmenge J, sowie nach Division durch die durchströmte Querschnittsfläche die Massenstromdichte J / A, die sich nach dem 1. Fick'schen Gesetz ergibt zu

$$J / A = D \cdot \nabla C \tag{3.8.2}$$

Es ist die Analogie erkennbar zur Wärmestromdichte (dem negativen Gradienten der Temperatur, multipliziert mit der Wärmeleitfähigkeit) in einer Temperaturfeldberechnung.

Da bei der Diffusion im allgemeinen nur Ausgleichsvorgänge zwischen Bereichen unterschiedlicher Konzentration von Interesse sind, wurde hier die Differentialgleichung genannt, die keine Quellterme (Zu- oder Abfuhr) auf der rechten Seite enthält. Statt dessen wurde der zeitabhängige Ausdruck genannt, mit dem ein transienter Ausgleichsvorgang beschrieben werden kann.

Diffusion	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
C Konzentration D Diffusionskoeffizient J/A Massenstromdichte	T Temperatur λ Leitfähigkeit q'' Wärmestromdichte	TEMP KXX TF

Tab. 3.8-1 Analogie Diffusion und Temperaturfeld

3.9 Vorgespannte Membranen

Die Potentialanalogie für den Fall einer vorgespannten Membran wird vielfach auch als "Seifenhautgleichung" bezeichnet. Damit ist die Anordnung anschaulich beschrieben, bei der eine dünnen Membran, die nur in der Membranebene nennenswerte Tragfähigkeit besitzt, unter einer Vorspannung steht und dadurch eine quer bzw. normal zur Membran wirkende Last tragen kann. Die Verformung der Membran quer zur Membranebene ergibt sich dann aus

$$\nabla^2 \left(Vu \right) = -p \tag{3.9.1}$$

mit

- V Membranvorspannung (membrane tension)
- u Querverformung
- p Differenzdruck (pressure imbalance)

Als quer wirkende Last ist hier der Differenzdruck angegeben, der aus dem Druck auf einer Seite der Membran und demjenigen der Gegenseite als resultierender Druck verbleibt.

Die Vorspannung liegt bei einer Seifenhaut durch die Oberflächenspannung der Seifenflüssigkeit vor. Bei einem Trommelfell - einem anderen Anwendungsbeispiel dieser Art - ist die Vorspannung auch anschaulich erkennbar.

Vorgespannte Membran (Seifenhaut)	Temperaturfeld	ANSYS-Programm
u Querverformung V Membranvorspannung p Differenzdruck	T Temperatur λ Leitfähigkeit q''' Wärmeerzeugungsrate	TEMP KXX HGEN

Tab. 3.9-1 Analogie vorgespannte Membran und Temperaturfeld

3.10 Plausibilitätsbetrachtungen

Bei der Betrachtung von Temperaturfeld-Aufgaben oder anderen Potential-Aufgaben ist es sinnvoll, generell in Potentialgrößen und energetischen Größen zu denken.

Für Temperaturfelder gilt grundsätzlich, dass Wärmeströme immer von hohen Temperaturen zu tieferen Temperaturen gerichtet sind, also vom hohen Potentialniveau zum tieferen Potentialniveau. Sie können sich dabei auch Wasser auf einer gewellten, hügeligen Landschaft vorstellen. Durch die Gravitation ist die Geländehöhe mit einem Potential vergleichbar, dies ist Ihnen von der Physik her als potentielle Energie bekannt. Das Wasser fließt grundsätzlich abwärts (vom hohen zum tieferen Potentialniveau). Und an steilen Abhängen fließt das Wasser schneller und kräftiger (der Gradient des Potentials in der Horizontalen ist von Bedeutung).

Für eine stetige Strömung des Wassers (keine zeitliche Änderung des Vorganges, stationär) muss auf dem Hügel (am hohen Potential) dauernd Wasser nachgespeist werden und in der Senke (am tiefen Potential) dauernd entfernt werden, damit die Strömung aufrecht erhalten werden kann. Im Temperaturfeld entspricht dies der Zufuhr von Wärme (Heizung) an den Orten der hohen Temperatur und der Abfuhr von Wärme (Kühlung) an den Orten der tiefen Temperatur.

Nun zu Temperaturfeldern, bei denen sich zeitlich etwas ändert (transient). Durchdenken Sie dazu die folgende Fragestellung.

Frage:
in einem Computergehäuse ist eine kleine Kontroll-Lampe eingebaut. Sie hat mit einer Leistung von 0,1 Watt einen sehr geringen Verbrauch. Das ist wirklich eine sehr geringe Leistung, man spürt kaum die Wärme der Lampe. Sie ist immer eingeschaltet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt der Lüfter am Gehäuse aus, das Gehäuse stellt jetzt eine dichte abschirmende Umschließung der elektronischen Einbauten und der Kontroll-Lampe dar, es kommt keine Wärme heraus an die Umgebung. Welche Temperatur im Gehäuse stellt sich nach langer Zeit ein?

Antwort:
Unendlich hohe Temperaturen. Denn so wie die Frage formuliert ist, stellt das Gehäuse eine Umschließung dar, bei der keine Abfuhr der Leistung nach außen auftritt, also eine adiabate Umschließung. Damit wird Leistung eingebracht, aber nicht abgeführt. Über die Zeit steigt also der Energieinhalt stetig an und führt so zu theoretisch unendlich hohen Temperaturen. In der Praxis sind natürlich Effekte vorhanden, die für eine Abfuhr der Leistung sorgen. Dies ist zum Beispiel die Konvektion zur Umgebungsluft in dem Zimmer. Auch Wärmestrahlung führt zur Abfuhr von Leistung. Dadurch wird also das Gehäuse in einem normalen Arbeitszimmer mit 20°C kaum spürbar wärmer werden. Wenn durch diese Wärmeabfuhr sich nach (sehr) langer Zeit die Temperaturen nicht mehr ändern, hat der Vorgang einen stationären Endzustand erreicht.

Diese Frage und Antwort stellen ein Beispiel für den Grundsatz dar:
ein stationäres, zeitlich sich nicht veränderndes System muss eine ausgeglichene Bilanz von Leistungszufuhr und –abfuhr aufweisen (Summe aller Leistungen gleich Null). Nur dann stellen sich endliche Temperaturen ein.

Hier ist ein anderes Beispiel dargestellt, bei dem energetische Größen durchdacht werden.

Frage:
Sie sind Hauseigentümer. In Ihrem Haus ist zwischen Flur, Küche und anderen Zimmern eine Abstellkammer umschlossen. Im Winter sind alle umgebenden Räume geheizt und auf 21°C eingestellt. Die Abstellkammer ist ungeheizt, sie messen 19°C in dem Raum. Ist es sinnvoll und energiesparend, den Raum auch auf 21°C aufzuheizen? Ist überhaupt eine Heizleistung erforderlich? Denn die Kammer ist doch – wie oben beschrieben - vollständig von warmen Räumen umgeben und kann gar keine Wärme verlieren?

Antwort:
Die Fragestellung behauptet, dass die Kammer allseits von warmen Zimmern umschlossen ist. Und trotzdem werden tiefere Temperaturen dort gemessen! Dann muss eine Wärmeabfuhr durch irgendeinen, hier bisher nicht genannten Effekt vorliegen. Auch ohne diesen Effekt näher zu konkretisieren, weisen die Temperaturangaben – die genannten Potentiale - dies nach. Und um die Kammer von 19°C auf 21°C einzustellen ist sehr wohl eine Heizleistung erforderlich, um die Wärmeabfuhr dieses ungenannten Effektes auszugleichen.

Diese Frage und Antwort stellen ein Beispiel für den Grundsatz der Wärmeleitung dar:
wenn Bauteilbereiche, die miteinander in Verbindung stehen, unterschiedliche Temperaturen haben, findet ein Austausch von Wärme statt. Die Wärmeenergie fließt vom hohen Temperaturniveau (Potentialniveau) zum tiefen Niveau.