Serie: FEM für Mediziner und Biomechaniker

In der Serie „FEM für Mediziner und Biomechaniker“ werden die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode (FEM) erläutert. Entsprechend dem Fokus der caMe werden hier die wesentlichen Eigenschaften der FEM anschaulich dargestellt. Dies ermöglicht einem FEM-Fremden, z.B. einem Arzt, die Qualität einer FEM-Simulation zu beurteilen. Dieses Wissen hilft, um beispielsweise Beiträge zum Thema FEM auf Konferenzen oder in Veröffentlichungen qualitativ einordnen zu können, oder aber auch um FEM-spezifische Begriffe richtig zu verstehen und damit das interdisziplinäre Arbeiten zu fördern.

Im ersten Teil dieser Artikelserie wurden die FEM-Grundlagen anschaulich dargestellt und der Lösungsablauf an einem Handrechenbeispiel im Detail erläutert (caMe 2-2011, Seite 36-42 und 3-2011, Seite 35-45). Die Idealisierung und die Erstellung eines Simulationsmodells wurden für ein Implantat in der Zahnmedizin in verschiedenen Varianten vorgestellt (caMe 1-2012, Seite 38-46).

In dem hier folgenden Teil der Artikelserie wird die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in der FEM-Simulation erläutert.

Die später folgenden Teile der Artikelserie werden sich z.B. mit dem Workflow zur Erstellung von medizinischen FEM-Modellen, mit der Bewertung der Qualität einer FEM-Simulation oder mit der Wahl von passenden Randbedingungen beschäftigen.

Teil 5

Nichtlinearitäten in der FEM-Simulation

C. Groth

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\sum_e \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} - \{u\}^T \cdot \{F\}$$

1 Einleitung

Die Simulationen im technisch-wissenschaftlichen Bereich lösen die Differentialgleichungen, die das physikalische Verhalten beschreiben. Mit der Finite-Elemente-Methode können die Differentialgleichungen in Gleichungssysteme umgeformt werden, die mit numerischen Programmen lösbar sind. Die Lösung geht von bekannten Daten aus (geometrische Abmessungen, Materialdaten, äußere Randbedingungen). Als Ergebnis werden Zahlenwerte für die Freiheitsgrade (degree of freedom, DOF) geliefert, das sind die Unbekannten dieser numerischen Aufgabe.

Eine Nichtlinearität liegt prinzipiell immer dann vor, wenn die Ausgangsdaten von den Ergebnisdaten (den Freiheitsgraden) abhängig sind.

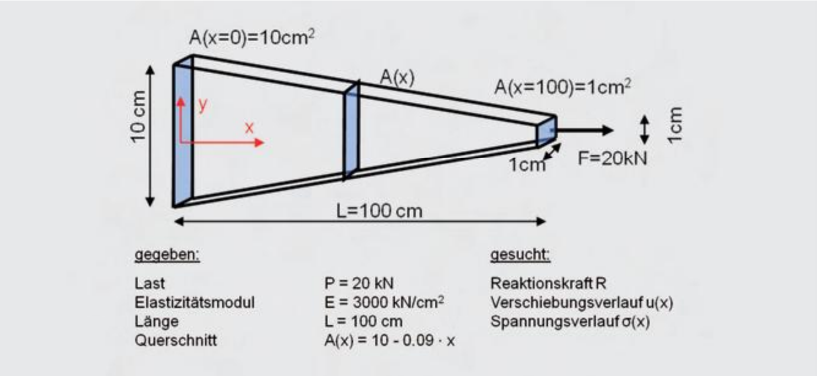

Bild 1: Die Problemstellung: Ein konisch verlaufender Stab, der in Längsrichtung belastet wird. Gesucht ist die durch die Last verursachte Verschiebung.

2 Simulation

Wie wird eine Nichtlinearität bei der numerischen Lösung berücksichtigt?

Betrachten wir dazu das Beispiel des konischen Zugstabes, das in dieser Serie bereits in caMe 2/2011, Seite 36-42, verwendet wurde. *Bild 1* zeigt die Problemstellung. Dort war als maßgebender Materialwert der Elastizitätsmodul vorgegeben. Dies ist das Verhältnis von mechanischer Spannung zu Dehnung. In dem Beispiel beträgt der Elastizitätsmodul E = 3000 [kN/cm^2], das ist etwa der Wert für Beton.

Welche Rolle spielt in dem dort vorgestellten Beispiel der Elastizitätsmodul? Betrachten wir hier genauer das rechte Element Nr. 2 des FEM-Modells dieses konischen Stabes. Das Element stellt den Abschnitt des Stabes dar, der in *Bild 2* als grauer Querschnitt skizziert ist. Dieses Element verhält sich in der Simulation der Mechanik wie eine Feder. Die Feder ist in

*

Dipl.-Ing. Clemens Groth
CADFEM GmbH, 85567 Grafing b. München

der Abbildung skizziert, sie verbindet die beiden Schmalseiten der Fläche miteinander. Wenn dieses Element (bzw. diese Feder) rechts und links durch eine Kraft gezogen wird, wird die Feder länger (und schmaler). Die gelängte Feder ist als rotes Rechteck skizziert. Das Verhältnis der relativen Längenänderung (Längenänderung bezogen auf die Ausgangslänge, auch **Dehnung** genannt) zur relativen Kraft (Kraft bezogen auf Querschnitt, auch mechanische **Spannung** genannt) ist der Elastizitätsmodul. Diese Größe ist charakteristisch für das Materialverhalten. In dem Diagramm rechts ist dieses Verhältnis eine Gerade. Solange diese Gerade nicht begrenzt ist und damit der Elastizitätsmodul für den gesamten Wertebereich als Verhältnis von Dehnung zu Spannung immer zutrifft, spricht man von einem **linearen Materialverhalten**.

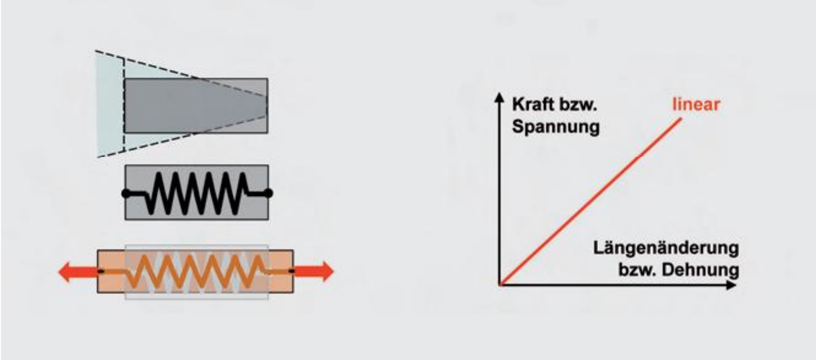

Bild 2: lineares Materialverhalten

Für Element 2 des Beispiels war für eine Dehnung von $\varepsilon = \Delta L/L = 0{,}002056$ [-] eine Spannung von $\sigma = 6{,}168$ [kN/cm^2] berechnet worden. In *Bild 3* sind diese Werte im Spannungs-Dehnungs-Diagramm zusammen mit der linearen Funktion, die den Elastizitätsmodul repräsentiert, eingezeichnet.

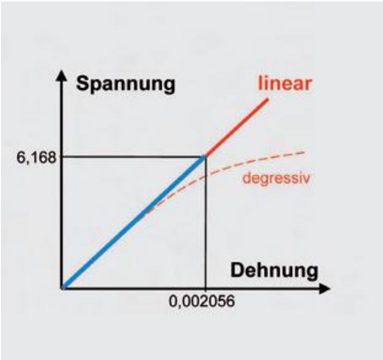

Bild 3: lineares Materialverhalten

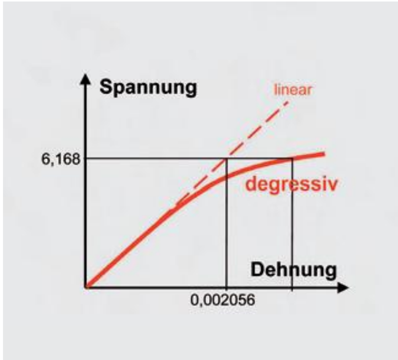

Bild 4: nicht-lineares Materialverhalten

Wie läuft die Simulation ab, wenn anstelle der linearen Funktion ein nichtlineares Materialverhalten vorliegt, wie es für Material wie Muskeln oder Bindegewebe als Gewebeeigenschaft typisch ist? *Bild 4* zeigt einen solchen degressiven nichtlinearen Verlauf zusammen mit den Werten des hier betrachteten Beispiels.

Der erste Lösungsschritt geht von den Anfangsbedingungen und damit von dem Elastizitätsmodul E = 3000 [kN/cm^2] aus. Die numerische Lösung des Gleichungssystems liegt damit wie im linearen Fall auf der in *Bild 4* mit „linear" bezeichneten Geraden. Dies ist in *Bild 5* skizziert.

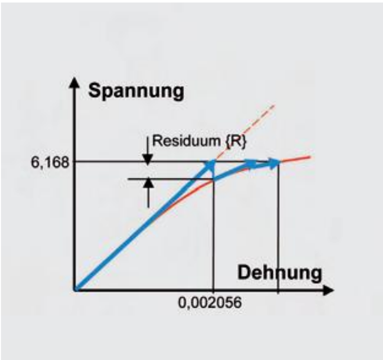

Bild 5: iterative Lösung

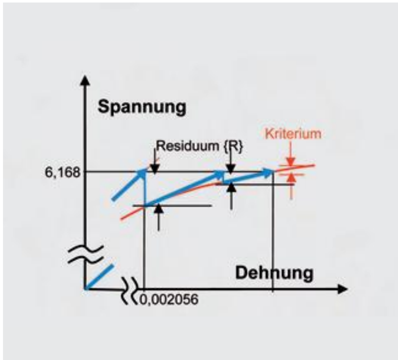

Bild 6: iterative Lösung, Detail

Bei nichtlinearem Verhalten wird diese Lösung als Lösungsversuch (Iteration) betrachtet und durch eine Gleichgewichtskontrolle geprüft. Dabei wird

- die berechnete Spannung verglichen mit
- der Spannung, die dem nichtlinearen Materialverhalten entspricht

(über die Querschnittsfläche des Elementes ergeben sich Kräfte). Der Vergleich dieser Werte ergibt für jedes Element des Modells eine Differenz, also ein Maß dafür, wie weit die aktuelle Lösung von den Modellbedingungen abweicht. Diese Abweichung – das Residuum {R} – wird mit einem Kriterium verglichen (*Bild 6*). Der Vergleich zeigt hier in diesem Beispiel: die Lösung dieser 1. Iteration ist noch unzureichend, es ist ein neuer Lösungsversuch erforderlich.

Die 2. Iteration geht von dem vorher berechneten Zustand aus, legt ein korrigiertes Spannungs-Dehnungs-Verhältnis (anstelle des Elastizitätsmoduls wird der an dieser Stelle zutreffende Tangentenmodul verwendet) zugrunde und führt eine neue Lösung aus.

Auch diese 2. Iteration wird mit einer Gleichgewichtskontrolle geprüft.

Die Folge der Iterationen wird so lange fortgesetzt, bis das Residuum {R} aus der Gleichgewichtskontrolle ein Kriterium unterschreitet und die Lösung als konvergiert bezeichnet werden kann, *Bild 6*.

Dieses Lösungsschema der Folge von Iterationen und Gleichgewichtskontrollen wird als Newton-Raphson-Methode bezeichnet. Das Ergebnis ist immer (nur) so genau wie das Kriterium festlegt.

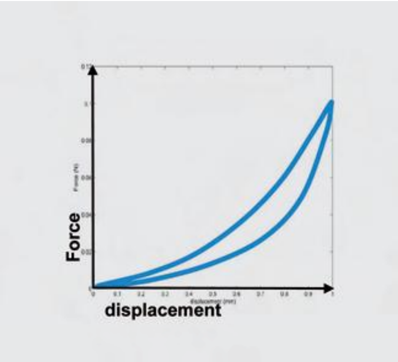

Bild 7: Kraft-Verschiebungs-Funktion einer Gewebe-Probe

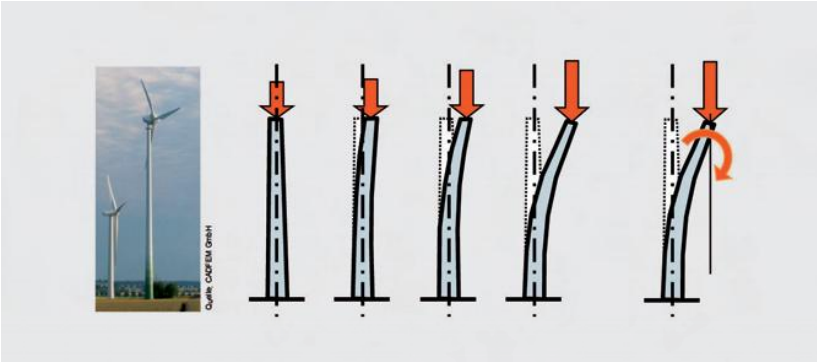

Bild 8: Windkraftanlagen-Turm, Last in Längsrichtung

3 Aufgaben des Anwenders

Bei der Anwendung der FEM im Alltag ist für den Anwender die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten einfach. Der Anwender muss die Daten des nichtlinearen Verhaltens eingeben – hier in diesem Fall die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Funktion. Im allgemeinen ist damit für die Software erkennbar, dass eine Nichtlinearität vorliegt, so dass automatisch eine Folge von Iterationen und Gleichgewichtskontrollen durchgeführt wird. Aufgrund der Nichtlinearität ist mit einem höheren numerischen Lösungsaufwand zu rechnen. Das Konvergenzkriterium ist meistens so praxisgerecht voreingestellt (default), dass der Nutzen (hohe Genauigkeit) dem Aufwand (erforderliche Rechenzeit) die Waage hält.

4 Kategorien von Nichtlinearitäten

4.1 Material-Nichtlinearität

In der Mechanik – zum Beispiel bei der Simulation der Gewebe-Verformung bei der CAS (computer aided surgery) – geht die Simulation von Materialdaten (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Materialgesetz, Spannungs-Dehnungs-Funktion) für das Weichgewebe aus. Das Ergebnis der Lösung sind Verschiebungen (das sind die Freiheitsgrade der Mechanik) und daraus Dehnungen und mechanische Spannungen. Eine Nichtlinearität ergibt sich hierbei daraus, dass die Materialdaten von der Höhe der Dehnungen und mechanischen Spannungen abhängen. Als Beispiel zeigt *Bild 7* Messwerte für Weichgewebe (A.Samani, D.Plewes /1/) (aus Verschiebung und Kraft an der Probe ergeben sich über die Querschnittsfläche und die Abmessungen Dehnungen und Spannungen).

Nichtlineare Materialdaten sind bei anderen Simulationen auch für Knochen und Muskeln zu berücksichtigen. Auch hier sind die Eigenschaften von der Höhe der Dehnungen und mechanischen Spannungen abhängig. Als „nichtlinear elastisch" wird das Verhalten bezeichnet, bei dem die Relation zwischen Dehnungen und Spannungen nichtlinear ist und bei der Entlastung wieder der Ausgangszustand vorliegt. Diese Beispiele stellen **Material-Nichtlinearitäten** dar (siehe hierzu auch **came** 1-2010, Seite 3-8).

Eine Simulation der Fluiddynamik (CFD) hat das Ziel, für eine Strömung den Verlauf der Strömung, die Druckverluste und Strömungswiderstände zu bestimmen. Diese Ergebniswerte beeinflussen die Ausgangswerte über die Materialeigenschaften(Viskosität,..) und über physikalische Effekte (Turbulenz,..). Diese Rückwirkungen stellen auch hier Nichtlinearitäten dar.

Stellen Sie sich eine Simulation der Reizleitung im Erregungsleitungssystem im Herzen (His-Purkinje-System) vor. Hierbei sind die Freiheitsgrade die elektrischen Potentiale (elektrische Spannungen). Die maßgebenden Materialdaten sind die elektrischen Widerstände. *Material-Nichtlinearitäten* ergeben sich durch die Abhängigkeit der Widerstandswerte vom elektrischen Potential.

4.2 Struktur-Nichtlinearität

Eine Nichtlinearität in der Mechanik liegt auch bei Kontakt vor. Ein Kontakt im Simulationsmodell berücksichtigt, dass bei der Berührung von Oberflächen Kräfte übertragen werden. Wenn sich durch Verschiebungen die Berührung öffnet und keine Kräfte mehr auftreten dürfen, gibt der Kontakt die Verbindung frei. Diese Abhängigkeit von den Verschiebungen (geschlossen, geöffnet) wird auch als **Struktur-Nichtlinearität** bezeichnet.

4.3 Geometrie-Nichtlinearität

In der Mechanik kann eine Nichtlinearität auch aus der Geometrie resultieren. In der Praxis liegt dies vor, wenn Beulen und Knicken beobachtet wird.

Ein typischer Fall hierfür ist ein vertikal aufrecht stehender, schlanker Turm, der in Längsrichtung eine Last trägt (so wie der Windkraftanlagen-Turm in *Bild 8*). Solange der Turm nicht zur Seite ausweicht, kann er sehr hohe Lasten ertragen. Aber bereits eine kleine Störung quer kann zum seitlichen Wegknicken führen. Das liegt daran, dass eine Krümmung zur Seite auftritt und dadurch der Turm zusätzlich ungünstig beansprucht wird (Euler-Knickfall).

5 Nichtlinearitäten in der FEM-Simulation in Medizin und Biomechanik

Nichtlinearitäten sind im Anwendungs-Alltag der Simulationen in der Medizin und Biomechanik sehr häufig zu berücksichtigen.

*Die hier kursiv gezeigten Referenzen finden Sie im Internet bei **www.cae-wiki.com:** geben Sie den **Suchbegriff** oben rechts ein*

Bei der Simulation der Mechanik des ***Bewegungsapparates*** und der ***Prothetik*** müssen die Materialdaten (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Spannungs-Dehnungs-Funktion) für das Implantat und den Knochen vorgegeben werden. Für kortikale (compacta) und trabekuläre Knochenbereiche stellt das Spannungs-Dehnungs-Verhalten eine ***Materialnichtlinearität*** dar. An der Grenze zwischen dem Implantat und dem Knochen muss über Kontakt (Strukturnichtlinearität) berücksichtigt werden, dass sich die Verbindung lockern kann.

Für Weichteile und Bindegewebe bei Simulationen für die plastische Chirurgie (computer aided surgery, ***CAS***) sind Materialgesetze angemessen, die für hochelastische Werkstoffe (Gummi, Elastomere) entwickelt wurden. Für die Wandung von Gefäßen bei der Simulation von ***Aneurysmen*** gibt es Ähnlichkeiten zu den Materialgesetzen für faserverstärkte Kunststoffe.

Bei der Simulation von ***Cochlea***-Implantaten ergibt sich das nichtlineare Verhalten im wesentlichen aus dem Memory-Material (Nitinol) als eine ***Materialnichtlinearität***. Dieses Material hat Eigenschaften, die sich aus nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Relation, aus plastischem Verhalten (bleibende Dehnung nach Entlastung) und einem zusätzlichen Einfluss der aktuellen Temperatur ergeben. In der Simulation muss dazu die Temperaturfeld- und die Mechanik-Lösung kombiniert werden.

6 Zusammenfassung

Die FEM-Simulation im Bereich der Medizin muss bei fast jeder Anwendung Nichtlinearitäten berücksichtigen. Nur in Prinzipuntersuchungen können lineare Bedingungen ausreichen.

Für den Anwender stellt dies kein Problem dar, denn moderne FEM-Software ist auf Nichtlinearitäten vorbereitet. Die wesentliche Aufgabe für den Anwender ist die Eingabe der Daten. Die numerische Lösung wird als Folge von Iterationen und anschließenden Gleichgewichtskontrollen ausgeführt (Newton-Raphson-Methode). Durch geeignete Konvergenzkriterien kann der Nutzen einer praxisgerechten Genauigkeit gegenüber dem Aufwand der erforderlichen Rechenzeit ausgewogen werden.

Literatur

/1/ A.Samani, D.Plewes: „A method to measure the hyperelastic parameters of ex vivo breast tissue samples“, Phys. Med. Biol. 49 (2004) 4395–4405 PII: S0031-9155(04)77438-2