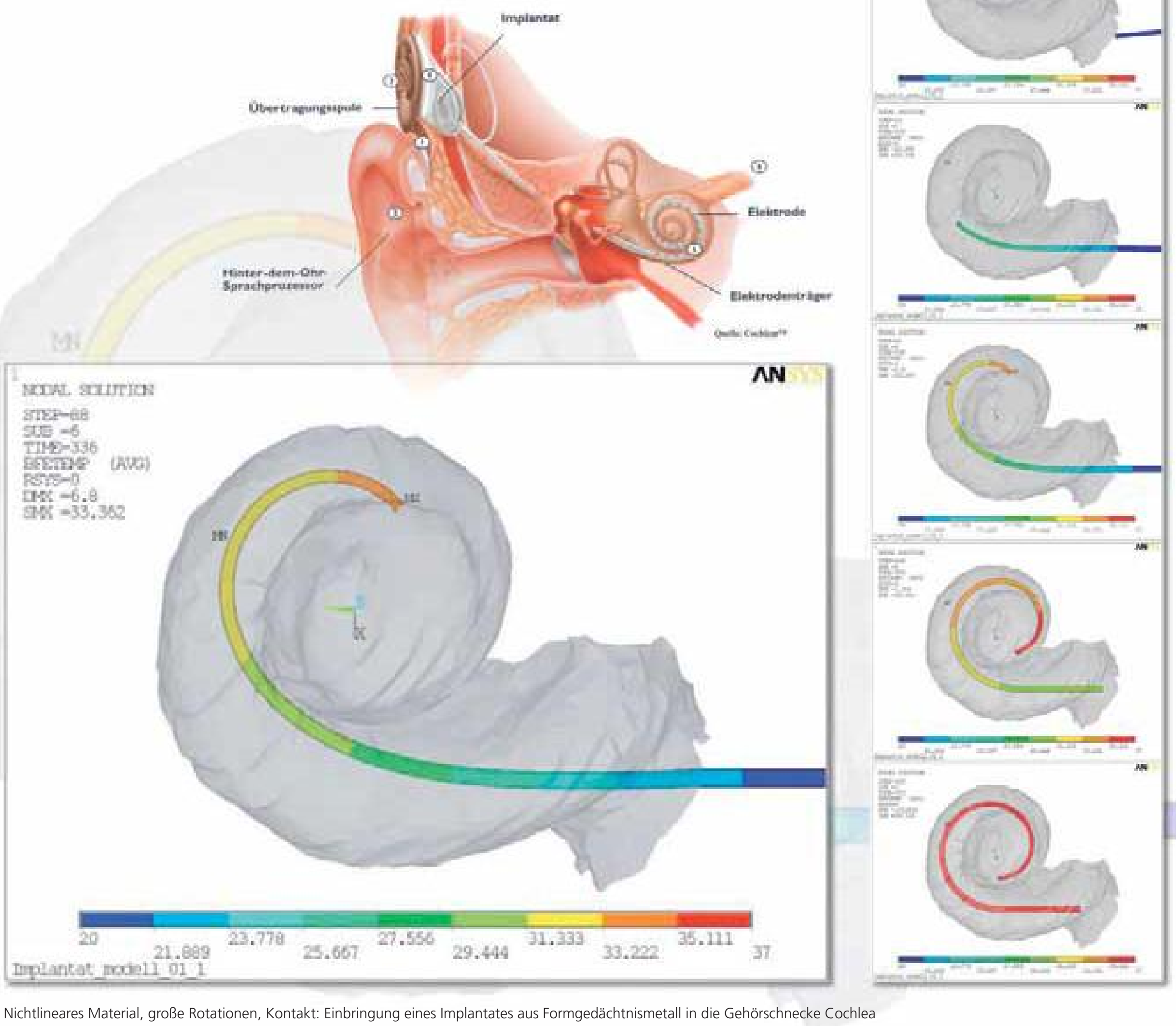
Nichtlinearitäten in der strukturmechanischen FEM-Berechnung

In der Mechanik-Ausbildung der Ingenieure sind zumindest anfänglich alle Zusammenhänge linear. Damit dies gilt, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

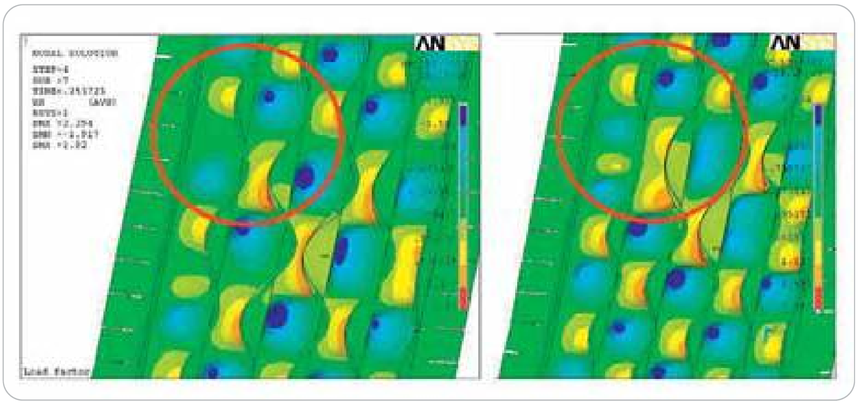
- **Gleichgewicht am unverformten System**
- **kleine Verdrehungen (Rotationen)**
- **linear-elastisches Materialverhalten**



Nichtlineares Material, große Rotationen, Kontakt: Einbringung eines Implantates aus Formgedächtnismetall in die Gehörschnecke Cochlea

Wenn von einer dieser Voraussetzungen abgewichen wird, hat man es mit einem nichtlinearen Problem zu tun. Die Betrachtung des Gleichgewichts am verformten System, die Theorie 2. Ordnung, englisch auch Stress Stiffening genannt, führt am einzelnen Stab dazu, dass die Längskräfte Einfluss auf die Momente desselben Stabes haben. Bereits bei Rahmen haben aber die Momente des einen Stabes Einfluss auf die Längskräfte des anderen, sodass sich insgesamt ein System ergibt, dessen Gleichungen iterativ gelöst werden. Diese Theorie wird regelmäßig im Bauwesen eingesetzt, um stabilitätsgefährdende Einflüsse einschließlich Imperfektionen zu berücksichtigen. Sie ist außerdem die Grundlage für die lineare Beulanalyse, bei der die kritische Last durch Lösen eines Eigenwertproblems bestimmt wird, wobei angenommen wird, dass bis dahin das Verhalten linear ist.

Treten vor dem Versagen größere Drehungen auf, muss der Einfluss der Winkelfunktionen berücksichtigt werden. Für beliebig große Drehungen kann dies über die



Beulmusterwechsel als Ursache für ein Konvergenzproblem

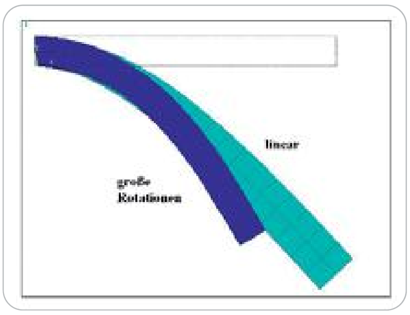
Beziehung zwischen Dehnungen und Verschiebungen (Green'sche oder Green-Lagrange-Dehnungen) oder durch Bezug auf ein mitdrehendes Koordinatensystem mathematisch formuliert werden. Die Notwendigkeit dafür beginnt schon bei wenigen Grad Verdrehung im System; bei dünnwandigen Bauteilen gilt auch die Faustregel, dass große Rotationen zu berücksichtigen sind, wenn die Durchbiegung größer als die Dicke wird. Zuerst hat bei überbestimmt gelagerten Systemen die Durchbiegung einen Einfluss auf die Längskräfte, größere Drehungen führen zu einer wesentlichen Änderung der Geometrie.

Stabilitätsprobleme können mit einer Theorie großer Drehungen ohne einschränkende Voraussetzungen berechnet werden. Auch ist es möglich, nach einem ersten Beulen, nach dem die Last noch weiter erhöht werden kann, die Berechnung fortzusetzen und in den nachkritischen Bereich zu gelangen. Dies ist z.B. bei ausgesteiften Blechkonstruktionen der einzig zuverlässige Weg, die maximal aufnehmbare Last zu bestimmen. Über ein Eigenwertproblem kann man hier nur noch eine Vorstellung von deren Größenordnung und aus der Beulform eine Anregung für eine ungünstige Imperfektion bekommen.

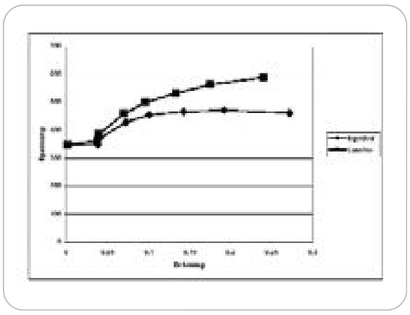
Kommt es bei Überschreiten der kritischen Last zu einem Lastabfall bei Zunahme des Weges, würde dies bei einer kraftgesteuerten Berechnung zur Nichtkonvergenz führen. Weiter kommt man mit Pfadverfolgungsalgorithmen wie dem Bogenlängenverfahren in verschiedenen Ausprägungen.

Von Stabilitätsproblemen betroffen sind vor allem schlanke oder dünnwandige Bauteile.

Bei großen Dehnungen geht man davon aus, dass es für die Dehnungsänderung gleichgültig sein sollte, ob eine wesentliche Vordehnung existiert oder nicht. Für den Dehnungszuwachs wird die Längenänderung daher auf die aktuelle Länge bezogen. Durch Integrieren kommt man auf ein logarithmisches Dehnmaß (wie der „Umformgrad"). Der Unterschied ist besonders im Druckbereich auffällig. Wenn die lineare, die Ingenieurdehnung gegen -1 geht, geht die logarithmische Dehnung gegen -∞. Das scheint vernünftig, bedeutet es doch, dass die Längenänderung gleich minus Ausgangslänge ist, der Körper mithin die Länge 0 aufweist, obwohl er noch Volumen hat.



Gleiches System, verschiedene Theorie: hell: linear, dunkel: große Drehungen



Vergleich von Spannungs- und Dehnungsmaßen bei gleichem Kraft-Weg-Verlauf

Für den Anwender eines Berechnungsprogrammes ist von Bedeutung, das verwendete Dehnmaß und das zugeordnete Spannungsmaß zu kennen, weil Spannungs-Dehnungs-Linien in der Regel passend zur verwendeten Theorie eingegeben werden müssen. Zur logarithmischen oder Hencky-Dehnung gehört die Cauchy-Spannung, die sich eindimensional aus Kraft durch Fläche im verformten Zustand ergibt und daher auch „wahre" Spannung genannt wird.

Große Rotationen und große Dehnungen werden kombiniert durch Anwendung eines logarithmischen Maßes auf die Green'schen Verzerrungen oder durch Summation von Inkrementen im mitdrehenden Bezugssystem.

Bei der Berechnung mit Finiten Elementen treten bei großen Dehnungen leicht starke Elementverzerrungen auf, die zur Ergebnisverschlechterung und zu Konvergenzproblemen führen. Dem kann begrenzt durch eine an die erwartete Verformung angepasste Vernetzung begegnet werden. Ansonsten helfen Rezoning (Glattziehen des Netzes bei Beibehaltung des topologischen Zusammenhanges) und Remeshing (Neuvernetzung auf der Basis der verformten Geometrie). Dabei muss jedoch beachtet werden, dass das verformte System Spannungen aufweist, die so von einem Netz zum anderen übertragen werden müssen (Mapping), dass weiterhin Gleichgewicht herrscht. Gleiches gilt für Variablen, die die Vorgeschichte des Materials enthalten (z.B. plastische Dehnungen).

Die Fülle der Materialgesetze ist inzwischen kaum noch überschaubar. Man unterscheidet jedoch folgendes grundsätzliche Verhalten:

- **Hyperelastizität für gummiartige Materialien**

Es ist üblich, Spannungen durch Ableitungen eines Energiefunktionals nach den Dehnungen zu bestimmen. Dadurch werden die Materialparameter schnell unanschaulich und die Parameterbestimmung schwierig. Ein Problem bei der Berechnung stellt dar, dass diese Materialien zwar stark verformt werden können, dabei ihr Volumen aber nicht ändern, also inkompressibel sind. Das bedeutet, dass es keinen konstitutiven Zusammenhang zwischen Druck und Volumendehnung gibt, was bei Finiten Elementen zu numerischen Schwierigkeiten führt. Zur Umgehung benötigt man spezielle Elementformulierungen. Von steifen Materialen umschlossene Gummibauteile bleiben trotzdem problematisch.

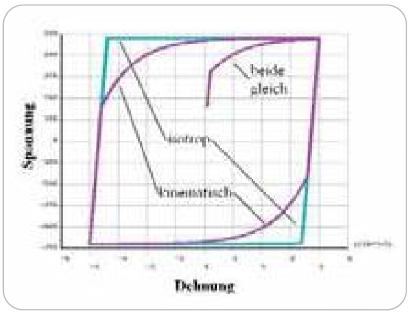
• Visko-Elastizität

Das Verhalten eines Bauteils ist vom zeitlichen Verlauf der Lastaufbringung abhängig. Verstreicht nach der Entlastung jedoch eine hinreichend lange Zeit, wird die ursprüngliche Form wieder eingenommen. In der linearen Visko-Elastizität wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen weiterhin durch den Elastizitäts- bzw. durch Schub- und Kompressionsmodul beschrieben, die jedoch zeitabhängig werden.

Visko-elastisches Verhalten ist temperaturabhängig. Typisch ist die Verwendung einer Analogie zwischen Temperatur und Geschwindigkeitseinfluss. Dabei wird der Temperatureinfluss durch Umrechung in eine Pseudo-Zeit (womit die effektive Geschwindigkeit verändert wird) mittels einer so genannten Shift-Funktion, z.B. der WLF-Gleichung (nach Williams, Landel, Ferry) berücksichtigt.

Stark visko-elastisch verhalten sich z.B. Schäume. Visko-Elastizität tritt aber auch bei den gummiartigen Materialien auf (Visko-Hyperelastizität, wobei die Parameter des Energiefunktionals zeitabhängig werden), bei Kunststoffen (der auf die Streckung der ungeordneten langen Molekülketten entfallende Anteil, die Entropie-Elastizität, ist elastisch und zeitabhängig) und sogar bei Glas in bestimmten Temperaturbereichen.

Der gern genannte frequenzabhängige Elastizitätsmodul ist eigentlich ein Effekt der Visko-Elastizität. Trotzdem kann bei Analysen im Eigenfrequenzbereich die Verwendung eines frequenzabhängigen E-Moduls sinnvoll sein.



Vergleich zyklischer Spannungs-Dehnungs-Linien bei kinematischer und isotroper Verfestigung

• Elasto-Plastizität

Diese Theorie wurde speziell für Metalle entwickelt. Bis zum Erreichen einer Fließgrenze verhält sich das Material linear elastisch. Danach treten plastische, d.h. bleibende, Dehnungen auf und die Entlastung erfolgt auf einem anderen Spannungs-Dehnungs-Pfad als die Belastung. Zur Theorie gehören:

· *Die Fließbedingung*
Sie gibt an, wann bei einem mehrdimensionalen Spannungszustand Fließen eintritt, typischerweise indem aus dem mehrachsigen Spannungszustand eine Vergleichsspannung berechnet und der aktuellen Spannung aus einer Fließkurve gegenübergestellt wird. Bei den Fließbedingungen unterscheidet man vor allem solche, die vom hydrostatischen, also allseitig gleichen Spannungsanteil abhängen (z.B. Drucker-Prager), und solche, bei denen das nicht der Fall ist (z.B. von Mises). Letztere Gruppe ist für kompakte Metalle geeignet, erstere für körnige Materialien wie Granulate, Pulver und Böden.

· *Die Fließregel*
Sie gibt an, wie die plastischen Dehnungsinkremente von den Spannungskomponenten abhängen.

· *Die Verfestigungsregel*
Sie gibt an, wie sich im Mehrdimensionalen die aktuelle Fließgrenze ändert. Bei der Verfestigungsregel ist zum einen die Beschreibung der Fließkurve von Bedeutung, zum anderen die Unterscheidung zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung, was einen extremen Einfluss auf das zyklische plastische Verhalten hat. Während isotrope Verfestigung allein für zyklisches Verhaltung unzureichend ist, kann mit kinematischer Verfestigung der Bauschinger-Effekt beschrieben werden.

• Kriechen

Kriechen bezeichnet das zeitabhängige Entstehen bleibender Dehnungen und wird beobachtet bei Metallen bei höheren Temperaturen, vielen anderen Werkstoffen, besonders aber bei Kunststoffen. Gleichungen für Kriechen geben die Kriechgeschwindigkeit an, und zwar in Abhängigkeit von der Temperatur, der Spannung und entweder der Zeit oder der Dehnung. Ersteres ist einfacher, Letzteres bei wesentlicher Laständerung richtiger.

Eine weitere Nichtlinearität stellt Kontakt dar. Dabei sind die Festhaltungen oder die Übergangsbedingungen zwischen zwei Körpern von der Verformung abhängig. Schwierigkeiten sind die effektive Kontaktsuche, damit nicht alle überhaupt möglichen Kontaktpaarungen abgearbeitet werden müssen, die Feststellung, ob ein Punkt direkt senkrecht über oder unter einem Flächenstück liegt, die Bestimmung von Abstand oder Eindringung und die Berechnung der Kraft, die notwendig ist, um eine Eindringung zu verhindern. Die Behandlung von Finiten Elementen mit Mittenknoten ist auch nur mit speziellen Algorithmen möglich.

Nichtlinearitäten führen zu nichtlinearen Gleichungen, die nicht direkt, sondern iterativ, vor allem mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden. Dabei wird über eine Tangentenmatrix, die die Ableitung der Knotenkräfte nach den Knotenverschiebungen darstellt, eine Folge von linearen Gleichungssystemen zur Bestimmung der Veränderung der Verschiebung definiert und gelöst, bis Konvergenz eintritt – oder auch nicht.

Spätestens da sind die Anwender von Berechnungsprogrammen gut beraten, etwas von der Theorie der Phänome, die oben nur angerissen worden sind, zu wissen. Es gibt Zusammenhänge zwischen physikalischem und mathematischem Verhalten, zwischen physikalischer und numerischer Stabilität. Stabilitätsprobleme treten auch nicht nur auf, wenn man nach ihnen sucht, sondern drohen – numerisch wie physika-

Literaturtipp

Professor Rust ist u.a. Autor des Lehrbuches

„Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen - Kontakt, Geometrie, Material"

1. Auflage 2009 erschienen bei Vieweg + Teubner
2009. XII, 293 S. Mit 203 Abb. u. 7 Tab. Br.
ISBN: 978-3-8351-0232-3
www.vieweg-teubner.de

Über das Buch

Das Buch beschreibt die numerische Berechnung von Nichtlinearitäten in der Strukturmechanik, d.h. große Drehungen, große Dehnungen (geometrische Nichtlinearitäten), nichtlineares Materialverhalten, besonders Plastizität und zeitabhängiges Verhalten, und Kontakt. Darauf aufbauend werden auch Stabilitätsprobleme und Traglastberechnungen behandelt. Dabei wird am Beispiel einfacher Systeme die Problematik erläutert, formelmäßig erfasst, in den Kontext der Finiten Elemente eingebunden und bis zum Dreidimensionalen verallgemeinert. Die einzelnen Schritte werden detailliert bis hin zu Zahlenbeispielen dargestellt. Das Buch richtet sich sowohl an Studierende als auch an Ingenieure in der Praxis, die entweder die Methode weiterentwickeln oder die Hintergründe bestehender Programme verstehen wollen.

Aus dem Inhalt

Geometrisch nichtlineares Verhalten - Stabilitätsprobleme - Lastinkrementierung - Theorie und Numerik der linearen Visko-Elastizität und der Elasto-Plastizität - Kriechen - Kontakt: Kontaktmodellierung - Kontaktbedingung - Kontakt-Kinematik - Kontaktfeststellung

Zielgruppe

- Studierende des Maschinenbaus und des Bauingenieurwesens im Hauptstudium
- Ingenieure in der Berufspraxis, die mit FE-Programmen arbeiten und diese effektiver nutzen wollen.

| Zusatzinformation |

lisch – in der Mechanik prinzipiell dann, wenn Druckspannungen auftreten, und wo ist das nicht der Fall?

Die Nutzer sollten auch wissen, was die Theorie umfasst, die sie mit einer Option einschalten, und worin sich Werkstoffgesetze unterscheiden. Man sollte deren Grundgleichungen kennen und für Spezialfälle auch lösen können, damit man zur Parameterbestimmung in der Lage ist. Auch wenn man dazu Optimierungsverfahren benutzt, sollte man die Größenordnung der Lösung kennen, sonst ist ein Scheitern vorprogrammiert. Bei Kontakt schließlich sollte man wissen, dass ein Statuswechsel (offen/geschlossen) nicht differenzierbar ist, sodass man hier vom Newton-Verfahren nicht viel erwarten kann. Je nach Methode ist daher die Wahl der Kontaktsteifigkeit oder das Festlegen von Toleranzen eine Gratwanderung zwischen Konvergenzproblemen und zu großen Fehlern. Auch die Vernetzung und die Kontaktdefinition entscheiden mit über Erfolg und Misserfolg.

Nichtlinear ist, wenn es nicht konvergiert, jedenfalls nicht auf Anhieb. Wohl dem, der durch Kenntnis der Theorie und der Algorithmen gezielt vorgehen kann. <<

i | Information

CAD-CAM REPORT ENGINEERING

Hinweis

Dieser Beitrag ist Teil einer aktuellen Serie zur FEM in der Fachzeitschrift CAD-CAM Report und erfolgt mit freundlicher Genehmigung der Redaktion.

www.plm-it-business.com

| Autor

Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Rust,
Fachhochschule Hannover
wilhelm.rust@fh-hannover.de

Wilhelm Rust war jahrelang CADFEM Mitarbeiter und ist heute Professor für Simulationsverfahren im Maschinenbau an der Fachhochschule Hannover. Dort ist er auch verantwortlich für den Master-Studiengang „Maschinenbau – Entwicklung". Zudem ist er Lehrbeauftragter an der esocaet (European School of Computer Aided Engineering Technologies) für die Studienmodule „Geometric Nonlinearities" und „Contact".