

# Serie: FEM für Mediziner und Biomechaniker

In der Serie „FEM für Mediziner und Biomechaniker“ werden die Grundlagen der FEM erläutert. Entsprechend dem Fokus der caMe, werden hier die wesentlichen Eigenschaften der FEM anschaulich dargestellt. Dies ermöglicht einem FEM-Fremden, z.B. einem Arzt, die Qualität einer FEM-Simulation zu beurteilen. Dieses Wissen hilft, um beispielsweise Beiträge zum Thema FEM auf Konferenzen oder in Veröffentlichungen Vorträge qualitativ einordnen zu können, oder aber auch um FEM-spezifische Begriffe rich-

tig zu verstehen und damit das interdisziplinäre Arbeiten zu fördern.

Im ersten Teil dieser Artikelserie wurden die Grundlagen der FEM anschaulich dargestellt. In diesem und dem folgenden Teilen, werden nun die theoretischen Grundlagen der FEM an einem Handrechenbeispiel erläutert.

Die dann folgenden Teile der Artikelserie beschäftigen sich z.B. mit dem prinzipiellen Ablauf einer FEM-Simulation, mit

dem Workflow zur Erstellung von medizinischen FEM-Modellen, mit der Bewertung der Qualität einer FEM-Simulation, mit nicht-Linearitäten oder mit der Wahl von passenden Randbedingungen.

Das Beispiel ist ein Auszug aus dem Buch „FEM für Praktiker“ von Günter Müller und Clemens Groth, erschienen im Expert Verlag, ISBN 978-3-8169-2685-6. Das gesamte Beispiel kann dort im Detail nachgelesen werden.

## Teil 2

# Ein Handrechenbeispiel

Gekürzt und zusammengestellt von C. Müller\*

In diesem und dem nächsten Teil der Serie werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen der FE-Methode anhand eines Fachwerkstabes erläutert. Es wird versucht, zentrale Begriffe der FEM wie die Steifigkeitsmatrix und die Vorgehensweise (Lösungsschritte) plausibel zu erläutern, sowie den Approximationscharakter der Methode herauszuarbeiten.

Die hier vorgestellte Theorie der FEM muss ein Anwender nicht können, um die FEM später anzuwenden, das machen die Computerprogramme für ihn. Sie dient dazu, zu verstehen, was im Hintergrund der Computer-Programme geschieht.

Es muss betont werden, dass hier nur die wichtigsten Schritte erläutert werden können und die Methode bei weitem nicht ausführlich dargestellt werden kann. Zur Ver-

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_e \{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} - \{u\}^T \cdot \{F\}$$

tiefung wird deshalb auf die Literatur verwiesen.

## 1 Beschreibung des Beispiels

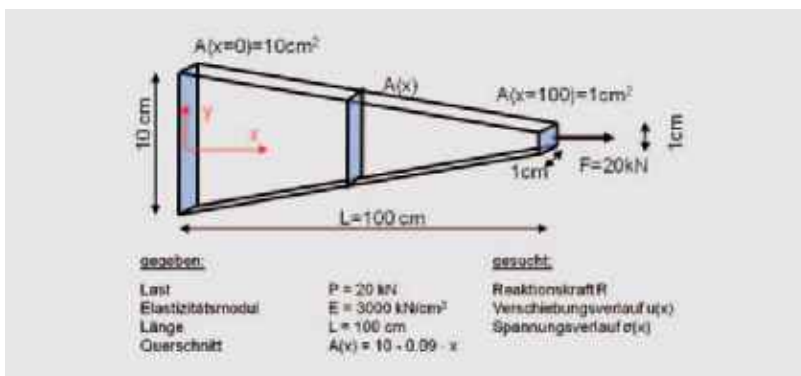
Gegeben ist ein Fachwerkstab (Bild 1) in der x-y-Ebene mit konisch verlaufendem Querschnitt. Er wird am linken Ende gehalten, am rechten Ende wird er durch eine Einzelkraft  $F = 20 \text{ kN}$  belastet. Das Material hat einen Elastizitätsmodul von  $E = 3000 \text{ kN/cm}^2$ . Die Länge beträgt  $100 \text{ cm}$ . Der Querschnitt ist linear veränderlich. Er

beträgt links  $10 \text{ cm}^2$  und rechts  $1 \text{ cm}^2$ . Der Querschnittverlauf wurde bewusst konisch gewählt, um einen stark veränderlichen Verlauf der Verschiebungen und Spannungen zu erzwingen. Die Breite des Fachwerkstabes beträgt konstant  $1 \text{ cm}$  über die gesamte Länge.

Aufgrund der Belastung von  $20 \text{ kN}$  am rechten Ende ergibt sich eine mechanische Belastung des Fachwerkstabes. Gesucht ist der Verlauf der Längsverschiebung  $u(x)$  und der Verlauf der Normalspannung  $\sigma(x)$  über die gesamte Stablänge, sowie die Reaktionskraft  $R$  am linken, eingespannten Ende.

## 2 Analytische Lösung

Für einfache geometrische Körper, wie der hier verwendete Fachwerkstab, lassen sich Differentialgleichungen formulieren, die das mechanische Problem über eine analytische Funktion beschreiben. Die Lösung der Differentialgleichung liefert ein mathematisch exaktes Ergebnis. Dieses Ergebnis dient als Referenz um die Ergebnisse der FEM-Simulation später zu vergleichen und zu bewerten.



**Bild 1:** Die Problemstellung: Ein konisch verlaufender Stab der in Längsrichtung belastet wird. Gesucht ist die durch die Last verursachte Verschiebung.

\* Original Autor: M.Sc. Leiter Biomechanik, Seniorforscher CAD/FEM GmbH, SWB/ Chair of Munich

Zuerst muss die Differentialgleichung, die das mechanische Problem für das (idealierte) Fachwerk beschreibt, aufgestellt werden. Die Lösung der Differentialgleichung liefert eine Funktion einer charakteristischen Größe, hier die Längsverschiebung  $u(x)$ . Durch Ableitung der Differentialgleichung können weitere Ergebnisse, wie hier im Beispiel der Verlauf der Normalspannung  $\sigma(x)$ , bestimmt werden.

Für die Herleitung der Differentialgleichung müssen, wie in der Elastizitätstheorie üblich, drei Bedingungen für Statik, Materialgesetz und Geometrie erfüllt werden.

Als erste Bedingung wird das statische Gleichgewicht aufgestellt. Die Beziehung ergibt sich aus folgender Formel, die besagt, dass an jeder Stelle  $x$  des Fachwerkes gilt: die Spannung  $\sigma$  ist gleich der Kraft pro Fläche.

$$\sigma(x) = \frac{F}{A(x)} \tag{1.1}$$

Als zweite Bedingung muss das gültige Materialgesetz aufgestellt werden. In dem vorliegenden Fall folgt es der Formel, die besagt, dass an jeder Stelle  $x$  des Fachwerkes gilt: die Spannung  $\sigma$  ist gleich dem Elastizitätsmodul  $E$  multipliziert mit der Dehnung  $\epsilon$ .

$$\sigma(x) = E \cdot \epsilon(x) \tag{1.2}$$

Als dritte Bedingung muss das kinematische Gleichgewicht aufgestellt werden. Es besagt, dass sich an jeder Stelle des Fachwerkes die Dehnung  $\epsilon$  aus der Längsverschiebung  $u$  an der Stelle  $x$  berechnet.

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx} \tag{1.3}$$

Durch ein gegenseitiges Einsetzen ergibt sich die folgende Beziehung. In dieser Gleichung steckt die von uns gesucht Längsverschiebung  $u$ .

$$\frac{F}{A(x)} = E \cdot \frac{du}{dx} \tag{1.4}$$

Löst man die Gleichung nun nach  $u$  auf, erhält man die Differentialgleichung, die das mechanische Problem beschreibt.

$$\frac{du}{dx} = \frac{F}{E \cdot A(x)} \tag{1.5}$$

Um die Differentialgleichung lösen zu können, muss man sie aufintegrieren und man erhält:

$$u(x) = \int \frac{F}{E \cdot A(x)} dx \tag{1.6}$$

Mit den Zahlenwerten ( $F = 20\text{kN}$ , Elastizitätsmodul  $= 3.000 \text{ kN/cm}^2$  und  $A(x) = 10 - 0.09 \cdot x$ ) aus dem Fachwerk erhält man:

$$u(x) = \frac{20}{3000} \int \frac{1}{10 - 0.09x} dx \tag{1.7}$$

Integriert man nun über die Stablänge von  $x = 0 \text{ cm}$  bis  $x = 100 \text{ cm}$  erhält man die gesuchte Lösung, also die Längsverschiebung  $u$  abhängig von der Stablänge  $x$ .

$$u(x) = -\frac{2}{27} \cdot \ln(10 - 0.09x) + \ln(10) \tag{1.8}$$

Die gesuchte Längsverschiebung  $u(x)$  des Fachwerkstabes lässt sich graphisch darstellen, siehe Bild 2.

Aus der Graphik kann nun an jeder Stelle  $x$  des Fachwerkstabes die Verschiebung abgelesen werden. An der Stelle  $x = 0$  ist die Verschiebung Null, was daran liegt, dass das Fachwerk an der linken Seite fest eingespannt ist. Am rechten Ende des

Fachwerkstabes, bei  $x = 100 \text{ cm}$  kann man eine Verschiebung von  $0,17 \text{ cm}$  ablesen. Aufgrund des konischen Querschnittes des Fachwerkstabes erhält man den Effekt, dass die Verschiebung über die Stablänge einen nicht-linearen Verlauf ergibt.

Mit Hilfe des berechneten Verschiebungsverlaufes lässt sich nun die Spannung im Fachwerkstab berechnen, siehe Bild 3.

Mit Hilfe der oben genannten Beziehung erhält man:

$$\sigma(x) = \frac{d\sigma}{dx} = \frac{F}{E \cdot A(x)} = \frac{20}{3000 \cdot (10 - 0.09x)} \tag{1.9}$$

$$\sigma(x) = E \cdot \epsilon(x) = \frac{20}{(10 - 0.09x)} \tag{1.10}$$



Bild 2: Analytische Lösung der Verschiebung über der Stablänge

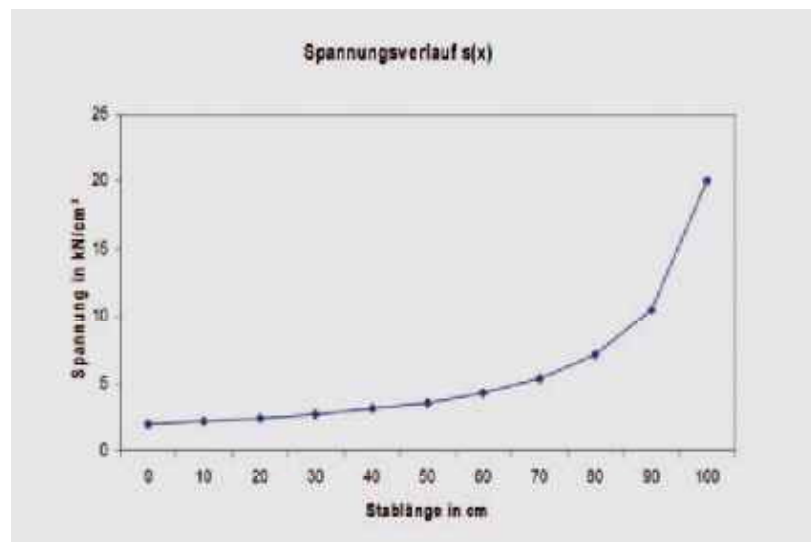


Bild 3: Analytische Lösung der Spannung über der Stablänge

Aus der Graphik kann nun an jeder Stelle  $x$  des Fachwerkstabes die Normalspannung  $\sigma$  abgelesen werden. An der Stelle  $x = 0$  ist die Spannung  $2 \text{ kN/cm}^2$ . Auch am rechten Ende des Fachwerkstabes, bei  $x = 100 \text{ cm}$  liegt die Spannung bei  $20 \text{ kN/cm}^2$ . Aufgrund des konischen Querschnittes des Fachwerkstabes erhält man wieder den Effekt, dass der Spannungsverlauf über die Länge des Fachwerkstabes einen nicht-linearen Verlauf hat. Die Spannungen an den Enden können auch leicht kontrolliert werden: Die Spannung errechnet sich aus der Kraft pro Fläche. An der linken Seite hat die Querschnittsfläche eine Größe von  $10 \text{ cm}^2$ , die wirkende Kraft beträgt  $20 \text{ kN}$ , die Spannung beträgt also  $2 \text{ kN/cm}^2$ . Auf der rechten Seite beträgt die Querschnittsfläche nur  $1 \text{ cm}^2$ , die wirkende Kraft beträgt aber ebenfalls  $20 \text{ kN}$ . Die Spannung muss also  $20 \text{ kN/cm}^2$  betragen.

## 2 Lösung nach der Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt wird die Finite-Elemente-Methode zur Lösung des Beispiels angewendet. Wie im Falle der analytischen Lösung suchen wir auch hier die Längsverschiebung  $u(x)$  entlang des Fachwerkstabes. Eine Reihe von Vereinfachungen werden vorgenommen, um nur die wesentlichen Eigenschaften hervorzuheben. Um den Schreibaufwand gering zu halten, wird die Struktur zunächst nur in zwei Elemente aufgeteilt.

Die Vorgehensweise bei einer FE-Analyse kann in 6 Schritte eingeteilt werden. Die sind:

1. Idealisierung: der Anwender wählt die Elemententheorie und den Elementtyp aus.
2. Aufteilung in Bereiche (Diskretisierung): im praktischen Alltag auch Vernetzung genannt. Die Geometrie wird dabei in Bereiche bzw. Elemente aufgeteilt. Für die jeweiligen Bereiche wird ein Verschiebungsverlauf angenommen (z. B. linearer Verlauf). Unbekannt sind die Stützwerte (hier Verschiebungen  $u$ ) an den Elementengrenzen (Knoten).
3. Aufstellen des Gleichungssystems: hierzu wird zunächst für jedes Element eine Elementsteifigkeitsmatrix berechnet, aus der Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen wird eine Gesamtsteifigkeitsmatrix gebildet und schließlich das Gleichungssystem des gesamten Bauteils zur Bestimmung der Unbekannten an den Knoten (hier Verschiebungen) aufgestellt.
4. Gleichungslösung: das Gleichungssystem wird gelöst. Das Ergebnis sind Zahlenwerte für die Unbekannten, also die Verschiebungen an den Knoten.
5. Rückrechnung: auf Elementebene werden die Verschiebungen verwendet, um daraus im Element die Dehnungen und Spannungen zu bestimmen.
6. Ergebnisauswertung und Kontrolle.

### 1. Schritt: Idealisierung

Der erste Schritt ist die Idealisierung des Fachwerkstabes. In der Festigkeitslehre werden verschiedene Theorien unterschieden,

abhängig von Belastungsart und Abmessung des Bauteils wird man die Fachwerk-, Balken-, Scheiben-, Platten-, Schalen-, 3-dimensionale Elastizitätstheorie einsetzen. In dem vorliegenden Fall gilt die Fachwerktheorie.

Nachdem die Theorie ausgewählt ist, muss ein passender Elementtyp gewählt werden. Hier das sogenannte Fachwerkelement. Da die Struktur sich in der Ebene darstellen lässt, genügt ein 2-dimensionales Element (nur im 2-d Raum in der  $x$ - $y$ -Ebene liegend).

### 2. Schritt: Aufteilung in Bereiche (Diskretisierung bzw. Vernetzung)

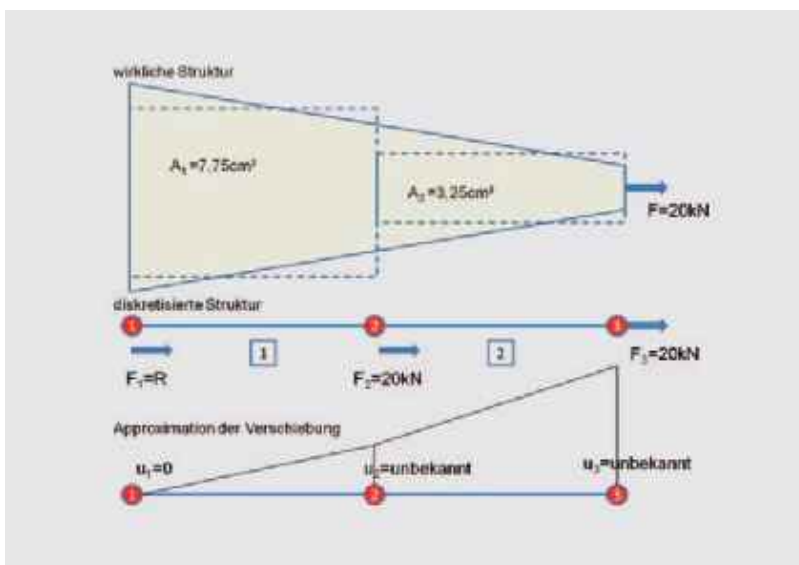
Das Tragwerk (*Bild 4* – wirkliche Struktur) soll zunächst nur in zwei Elemente mit 3 Knoten eingeteilt werden (*Bild 4* – diskretisierte Struktur). Das Element 1 mit den Knoten 1 und 2 repräsentiert die linke Hälfte des Fachwerkes mit einer gemittelten Querschnittsfläche von  $7,75 \text{ cm}^2$ . Das Element 2 mit den Knoten 2 und 3 repräsentiert die rechte Hälfte des Fachwerkes mit einer gemittelten Querschnittsfläche von  $3,25 \text{ cm}^2$ .

Für jedes Element wählen wir einen linearen Ansatz für die unbekannte, gesuchte Verschiebungsfunktion  $u(x)$ . (*Bild 4* – Approximation der Verschiebung). Das heißt, die Verschiebungsfunktion wird approximiert durch eine lineare Funktion, die sich jeweils über einen Bereich (Element) erstreckt. Durch den Zusammenbau der Elemente wird gewährleistet, dass die Verschiebung  $u$  an den Verbindungsstellen der Elemente 1 und 2, also dem Knoten 2, gleich groß sind.

Die Approximation des Verschiebungsverlaufes über ein Element erfolgt bei diesem Elementtyp durch die lineare Verschiebungsfunktion:

$$u = a \cdot \hat{x} + b \cdot x \quad (2.1)$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  freie Konstanten. Anstelle der Konstanten  $a$  und  $b$  werden nun die gesuchten Knotenverschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  bzw.  $u_2$  und  $u_3$  der beiden Elemente (siehe auch *Bild 4* – Approximation der Verschiebung) als Unbekannte eingeführt. Die Knotenverschiebungen  $u$  sind in der FEM unter dem Begriff Freiheitsgrad bekannt. Die Verschiebungsfunktion  $u(x)$  wird dann durch ein Produkt aus Knotenverschiebungen und sogenannten Formfunktionen beschrieben.



**Bild 4:** Reduzierung des Modells auf zwei Finite Elemente mit drei Knoten

Mit  $u(x=0) = u_1$  und  $u(x=L) = u_2$  (2.2)

Elementlänge  $L$  ergibt sich  $u = w$  und  $w = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$  (2.3)

Damit ist:

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1 - \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x \\ \frac{u_2 - u_1}{L} \cdot x + u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$u(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  (2.4)

$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2$  (2.5)

wobei  $N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$  und  $N_2(x) = \frac{x}{L}$  (2.6)

als Formfunktionen bezeichnet werden.

In Matrixschreibweise lautet dann die Verschiebungsfunktion als Produkt von Verschiebung  $u$  und Formfunktion:

$$u(x) = [N_1; N_2] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{u\} \quad (2.7)$$

Die Formfunktionen  $N_1$  und  $N_2$  können als Einheitsverschiebungen

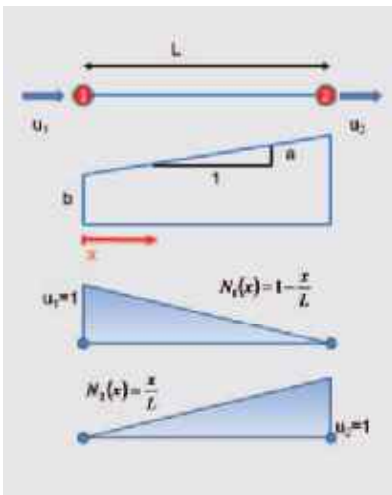
mit  $u_1 = 1$  und  $u_2 = 0$

bzw.  $u_2 = 1$  und  $u_1 = 0$

betrachtet werden.

Aus Bild 5 erkennt man, dass die Formulierung der Funktion  $u(x)$  nach (2.7) der von (2.1) äquivalent ist.

Im allgemeinen Fall (2-d oder 3-d Theorie) besteht  $[N]$  aus mehreren Zeilen. Die



**Bild 5:** Formfunktion eines Fachwerk-elementes

Funktion  $u$  ist im allgemeinen Fall sowohl in  $x$ - als auch in  $y$ - und  $z$ -Richtung anzusetzen. Im allgemeinen Fall lautet (2.7) daher:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{u\} \quad (2.8)$$

**Dehnungen  $\epsilon$  und Spannungen  $\sigma$ :**

Neben den Verschiebungen  $u$  werden noch die Dehnungen  $\epsilon$  und die Spannungen  $\sigma$  benötigt. Wie bei der analytischen Lösung, können auch hier die Dehnungen  $\epsilon$  bzw. die Spannungen  $\sigma$  über die Ableitung der Verschiebung  $u$  berechnet werden.

Die Dehnungen  $\epsilon$  berechnen sich aus der Ableitung der Verschiebungsfunktion  $u$ :

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [N] \cdot \{u\} \quad (2.9)$$

mit

$$\frac{d[N]}{dx} = \frac{d}{dx} [N_1; N_2] = [-B_1; B_2] = [B] \quad (2.10)$$

ergibt sich in Kurz- bzw. Matrixschreibweise

$$\epsilon(x) = [B] \cdot \{u\} \quad (2.11)$$

In unserem Beispiel ist:

$$[B] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} = [B_1; B_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Die Spannung  $\sigma$  ist mit der Dehnung  $\epsilon$  über den Elastizitätsmodul  $E$  (allgemein die Werkstoffmatrix) verknüpft.

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (\text{Werkstoffbeziehung}) \quad (2.12)$$

Im allgemeinen Falle ist der Skalarwert  $E$  eine Matrix, die hier als  $[D]$  dargestellt wird. Es treten dann nicht nur ein Spannungswert, sondern Spannungskomponenten, die für verschiedene Raumrichtungen gelten, auf. Die Spannungen werden in einem Spannungsvektor zusammengefasst

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

Mit (2.11) ergibt sich:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{u\} \quad (2.13)$$

Damit sind der Verschiebungsverlauf  $u$  innerhalb des Elementes (2.7) und die daraus abgeleiteten Größen wie die Dehnungen  $\{\epsilon\}$  (2.11) und die Spannungen  $\{\sigma\}$  (2.12) festgelegt. Daraus können nun die gesuchten, noch unbekanntenen Knotenverschiebungsgrößen  $\{u\}$  berechnet werden.

**3. Schritt: Aufstellen des Gleichungssystems**

Es gilt nun die unbekanntenen Knotenverschiebungsgrößen zu bestimmen. Die unbekanntenen Knotenverschiebungen werden über die Minimalforderung der potentiellen Energie für die Struktur bestimmt. Aus der Minimalforderung resultiert ein algebraisches Gleichungssystem, dessen Auflösung die gewünschten Knotenverschiebungen liefert.

Die potentielle Energie (das Potential)  $\pi$  setzt sich aus dem Potential der inneren Kräfte  $\pi_i$  und dem Potential der äußeren Kräfte  $\pi_a$  zusammen.

$$\pi = \sum_{\text{Elemente}} \pi_i + \sum_{\text{Knoten}} \pi_a = \sum_{\text{Elemente}} \left( \int_{\text{Element}} \sigma \cdot \epsilon \, dx \right) - \sum_{\text{Knoten}} F \cdot u \quad (2.14)$$

Das Potential der inneren Kräfte  $\pi_i$  entspricht der Summe der Potentiale der einzelnen Elemente  $\pi_{ie}$ . Das Potential der äußeren Kräfte  $\pi_a$  ergibt sich aus der Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte, die an den Knoten wirken  $\pi_{ak}$  und der äußeren Kräfte, die auf die Elemente wirken  $\pi_{ae}$ . Äußere Kräfte im Elementbereich werden zunächst ausgeschlossen. Damit entfällt  $\pi_{ae}$ .

$\pi_{ie}$ , die Formänderungsarbeit innerhalb eines Elementes, errechnet sich aus:

$$\pi_{ie} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{Element}} \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \, dx \quad (2.15)$$

Mit  $\{\epsilon\} = [B] \cdot \{u\}$

und  $\{\sigma\} = [D] \cdot \{u\}$

sowie

$$\{\sigma\} = [D] \cdot [B] \cdot \{u\} \quad (2.16)$$

ergibt sich:

$$\pi_{ie} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\text{Element}} \{u\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{u\} \, dx - \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot \int_{\text{Element}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \sigma \cdot \{u\} \, dx \quad (2.17)$$

Wir bezeichnen den Term

$$\int_{\text{Element}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{u\} \, dx = [k] \cdot \{u\} \quad (2.18)$$

als Steifigkeitsmatrix eines Elementes  $e$ .

Damit ergibt sich für das innere Potential des Elementes  $e$ :

$$\pi_{ie} = \frac{1}{2} \cdot \{u\}^T \cdot [k] \cdot \{u\} \quad (2.19)$$

Das Potential der äußeren Kräfte an den Knoten errechnet sich aus dem Produkt der Knotenverschiebungen mit den Knotenlasten  $F$

$$W_{ext} = \{u\}^T \cdot \{F\}$$

Das Gesamtpotential  $\Pi$  (2.14) ergibt sich damit zu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( \sum_{e=1}^n [K]^e \cdot \{u\} \right) - \{u\}^T \cdot \{F\} \quad (2.20)$$

Aus der Forderung des Minimums der potentiellen Energie ergibt sich die Steifigkeitsmatrix für das gesamte System, d.h. ein Gleichungssystem, aus dem die unbekannten Verschiebungen an den Knoten bestimmt werden können.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = 0 = \left( \sum_{e=1}^n [K]^e \right) \cdot \{u\} - \{F\} \quad (2.21)$$

$$\left( \sum_{e=1}^n [K]^e \right) \cdot \{u\} = \{F\} \quad (2.22)$$

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (2.23)$$

$[K]$  ist die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur, die sich aus der Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen  $[K]^e$  zusammensetzt,  $\{u\}$  ist der Knotenverschiebungsvektor und  $\{F\}$  der Knotenkraftvektor.

Im Folgenden werden die Elementsteifigkeitsmatrizen  $[K]^e$ , daraus die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[K]$  und der Lastvektor  $\{F\}$  für unser Beispiel mit zwei Elementen aufgestellt.

Zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix  $[K]^e$  wird das Integral über dem Elementvolumen  $V$  aufgelöst indem zuerst über die Fläche  $A$  und dann über die Länge  $L$  integriert wird:

$$[K]^e = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \\ = \int_0^L \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA \cdot dx \\ = A_e \cdot \int_0^L [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx$$

mit  $A_e = \frac{A_1 + A_2}{2}$

als Mittelwert der Querschnitte am linken bzw. rechten Elementende.

Hier ist die Werkstoffmatrix  $[D]$  eine skalare Größe (Elastizitätsmodul  $E$ ). Anstelle von  $[D]$  kann  $E$  gesetzt werden. Für den Term in dem Integral erhält man dann:

$$[B]^T \cdot [D] \cdot [B] = [B]^T \cdot E \cdot [B]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}; \quad [B]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T \cdot E \cdot [B] = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L} & \\ & \frac{E}{L} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T \cdot E \cdot [B] = \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & -\frac{E}{L^2} \\ -\frac{E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = A_e \cdot \int_0^L [B]^T \cdot E \cdot [B] \cdot dx \\ = A_e \cdot \int_0^L \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot dx$$

$$[K]^e = \frac{E \cdot A_e}{L^2} \begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \frac{E \cdot A_e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für beide Element. Einzusetzen sind die Werte für das Material  $E$ , die Querschnittsfläche  $A_m$  und die Länge  $L$  des jeweiligen Elements.

Die Zahlenwerte, die für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen in unserem Beispiel einzusetzen sind, sind in der *Tabelle* zusammengefasst:

Element i	E	$L^i$	$A_m^i$
1	3000	50	7.75
2	3000	50	3.25

Eingesetzt in die Steifigkeitsmatrix ergeben sich für die beiden Elemente 1 und 2 die folgenden Steifigkeitsmatrizen  $[K]_1$  und  $[K]_2$

$$[K]_1 = \frac{E \cdot A_{m1}}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 465 & -465 \\ -465 & 465 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 195 & -195 \\ -195 & 195 \end{bmatrix}$$

Aufbau des Gesamtgleichungssystems:

Das Gesamtpotential lautet:

$$\Pi = (\Pi_1 + \Pi_2) + W_{ext}$$

wobei mit  $\Pi_1$  das innere Potential vom Element 1, mit  $\Pi_2$  das innere Potential von

Element 2 und mit  $W_{ext}$  das äußere Potential der Knotenkräfte bezeichnet ist.

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T \cdot [K]_1 \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \cdot [K]_2 \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Zusammengefasst:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & & \\ & K_{22} & \\ & & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Mit Zahlenwerten:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 465 & & 0 \\ -465 & 465+195 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Die Minimaländerung für  $\Pi$  führt auf

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = 0$$

und damit auf das Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 465 & -465 & 0 \\ -465 & 465+195 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

#### 4. Schritt: Gleichungsauflösung

Aus dem Gleichungssystem

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (2.27)$$

kann nun der unbekannte Knotenverschiebungsvektor  $\{u\}$  bestimmt werden. Es gilt folgende Umwandlungs-Regel:

$$[K]^{-1} \cdot [K] \cdot \{u\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \\ [I] \cdot \{u\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \\ \{u\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \quad (2.28)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist eine der aufwändigsten Schritte bei der FEM-Simulation. Es gibt verschiedene mathematische Verfahren, z.B. das Eliminationsverfahren nach Gauß, die hier aber nicht vorgestellt werden sollen.

Der gesuchten Verschiebungsvektor  $\{u\}$ , also die Verschiebungen  $u_1, u_2$  und  $u_3$  an den Knoten, ergibt sich nach der Berechnung wie folgt:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0428 \\ 0,1456 \end{Bmatrix}$$

**5. Schritt: Rückrechnung: Ermittlung der Dehnungs- und Spannungswerte**

Mit dem Verschiebungsvektor  $\{u\}$ , der die Knotenverschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  an den Elementengrenzen von Element 1 bzw. der die Knotenverschiebungen  $u_2$  und  $u_3$  an den Elementengrenzen von Element 2 beinhaltet, können nun im Element 1 bzw. 2 die Verschiebungen, Dehnungen bzw. Spannungen bestimmt werden.

**Element 1:**

Elementknotenverschiebungsvektor:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0428 \end{Bmatrix}$$

**Verschiebungsverlauf:**

$$u(x)_1 = \{N\} \cdot \{u^e\} = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$u(x)_1 = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \cdot 0 + \left( \frac{x}{L} \right) \cdot 0,0428$$

$$u(x)_1 = 0 + \left( \frac{x}{50} \right) \cdot 0,0428$$

$$u(x)_1 = 0 + 0,000856 \cdot x$$

Elementanfang:

$$u(x=0) = 0,0 \text{ cm}$$

Elementende:

$$u(x=50) = 0,0428 \text{ cm}$$

**Spannungsverlauf:**

$$\sigma(x)_1 = \{D\} \cdot \{E\} \cdot \{u^e\} = E \cdot \left[ \frac{1}{L} \cdot \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{E}{L} \cdot u_1 + \frac{E}{L} \cdot u_2$$

$$= 30000 \cdot \frac{1}{50} \cdot 0,0428$$

$$= 2,568 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

**Element 2:**

Elementknotenverschiebungsvektor:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0428 \\ 0,1456 \end{Bmatrix}$$

**Verschiebungsverlauf:**

$$u(x)_2 = \{N\} \cdot \{u^e\} = \left[ \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u(x)_2 = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \cdot 0,0428 + \left( \frac{x}{L} \right) \cdot 0,1456$$

$$u(x)_2 = \left( 1 - \frac{x}{50} \right) \cdot 0,0428 + \left( \frac{x}{50} \right) \cdot 0,1456$$

$$u(x)_2 = 0,0428 + 0,0029 \cdot x$$

Elementanfang:

$$u(x=0) = 0,0428 \text{ cm}$$

Elementende:

$$u(x=50) = 0,1456 \text{ cm}$$

**Spannungsverlauf:**

$$\sigma(x)_2 = \{D\} \cdot \{E\} \cdot \{u^e\} = E \cdot \left[ \frac{1}{L} \cdot \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{E}{L} \cdot u_2 + \frac{E}{L} \cdot u_3$$

$$= \frac{30000}{50} \cdot (-0,0428 + 0,1456)$$

$$= 6,168 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$$

**6 Schritt: Ergebnisauswertung und Kontrolle**

Der letzte Schritt sowohl bei einer FE-Berechnung als auch bei einer analytischen Lösung ist die Auswertung der Ergebnisse. Dazu gehört das Auftragen und Auflisten und die kritische Bewertung der erzielten Ergebnisse.

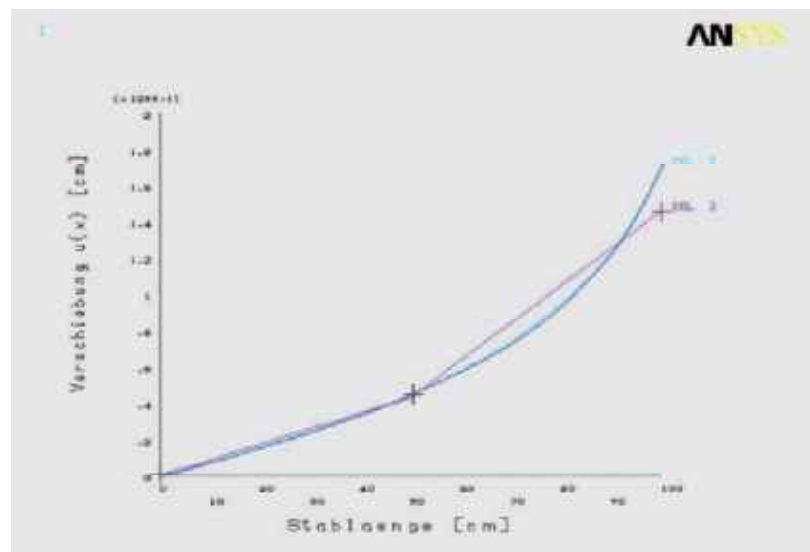
Zur Kontrolle werden der Verschiebungsverlauf und die Spannungen der approximierten FEM-Lösung der exakten analytischen Lösung gegenübergestellt.

Zunächst werden die Verschiebungen betrachtet. Der Verschiebungsverlauf ist in *Bild 6* dargestellt.

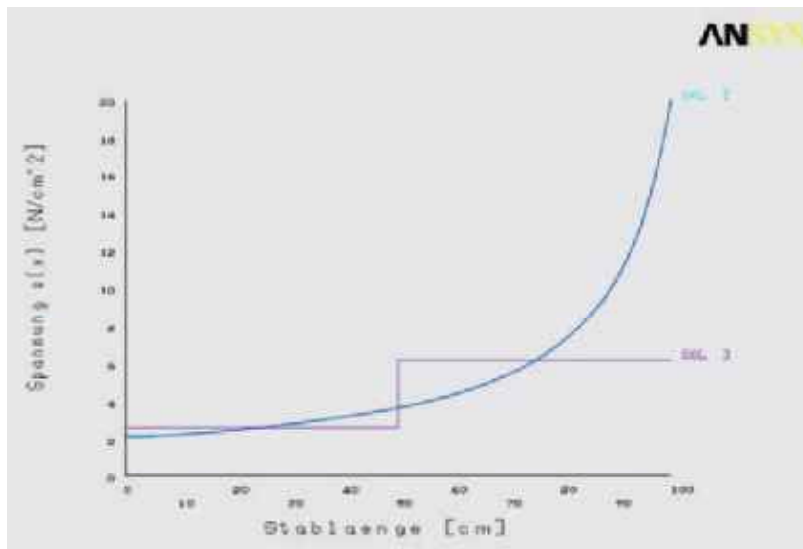
In türkis dargestellt ist die analytische Lösung. In lila dargestellt ist die Lösung nach der FEM. Bei der FEM-Lösung erhält man nur an den Stützstellen, also den Knoten, Ergebnisse. Dazwischen wird der Verschiebungsverlauf linear, so wie er durch die linearen Ansatzfunktionen (Formfunktionen) definiert wurde, approximiert. Im Element 1, also von 0 cm bis 50 cm, erhält man bereits eine sehr gute Annäherung an die analytische Lösung. Im Element 2 von 50 cm bis 100 cm ist der Gradient der Verschiebung stärker und lässt sich daher mit einer linearen Verschiebung weniger gut beschreiben.

Der Spannungsverlauf wird in *Bild 7* gezeigt. Auch hier wird die analytische Lösung gegenüber der approximierten Lösung gezeigt.

Man erkennt hier, dass die Spannungen, die sich aus der Ableitung der linearen Verschiebungsfunktionen ergeben, einen Genauigkeitsverlust erleiden: sie werden pro Element nur konstant wiedergegeben und weisen Sprünge an den Übergangsstellen auf. Dieser Sachverhalt ist typisch für die



**Bild 8:** FEM Lösung der Verschiebung über der Stablänge. Die gesuchten Verschiebungen werden an den Stützstellen, den Knoten, ermittelt. Zwischen den Knoten werden die Verschiebungen gemäß der linearen Ansatzfunktion dargestellt.



**Bild 7:** FEM Lösung der Spannungen über der Stablänge. Die gesuchten Spannungen sind über dem Element konstant.

FE-Methode. Die Spannungen verlaufen i. a. nicht kontinuierlich über die Elementgrenzen hinweg, die Verschiebungen jedoch sind kontinuierlich, ihr Verlauf kann aber Knickpunkte an den Elementgrenzen aufweisen.

Im Bild zu sehen ist, dass für Element 1 von 0 cm bis 50 cm die Spannungen relativ gut wiedergegeben werden. In Element 2 von 50 cm bis 100 cm sieht man aber sehr deutlich, dass es hier starke Abweichungen zur exakten Lösung gibt.

Um den Spannungsverlauf besser abbilden zu können, sind mehr Elemente notwendig.

Die Effekte einer feineren Vernetzung werden in dem nächsten Heft 3/2011 gezeigt.

Anzeigen

KOMPETENZ  
IN OPTISCHER  
3D-DIGITALISIERUNG









www.steinbichler.de

**Im expert verlag erscheinen  
Fachbücher zu den Gebieten**

*Weiterbildung – Wirtschaftspraxis –  
EDV-Praxis – Elektrotechnik –  
Maschinenwesen – Praxis Bau/  
Umwelt/Energie, berufs-  
und persönlichkeitsbildende  
Audio-CDs (expert audio)  
sowie Software (expertsoft)*

**Bitte fordern Sie unser  
Verlagsverzeichnis auf CD-ROM  
an!**

expert verlag  
Fachverlag für Wirtschaft & Technik

Wankelstraße 13  
D-71272 Renningen

Postfach 2020  
D-71268 Renningen

Telefon (07159) 9265-0  
Telefax (07159) 9265-20

E-Mail expert@expertverlag.de  
Internet www.expertverlag.de