

# Flexible Mehrkörpersysteme in der Fahrzeugsimulation

## Zusammenfassung

In der modernen Fahrzeugentwicklung werden einerseits aufgrund hoher Qualitätsanforderungen und andererseits aufgrund wachsender Rechnerleistungen immer mehr Gesamtfahrzeugsimulationen durchgeführt. Bei hinreichend steifen Strukturen liefert die Methode der klassischen Mehrkörpersimulation hinreichend genaue Ergebnisse. Im Bereich der Schlechtwegsimulation treten jedoch Situationen auf, bei denen das durch Bodenwelligkeit und Fahrgeschwindigkeit definierte Frequenzspektrum der Anregung mit dem Eigenfrequenzspektrum des Fahrzeugs überlappt. In solchen Fällen ist es notwendig, die elastischen Eigenschaften der betreffenden Bauteile zu berücksichtigen, was auf den Begriff der hybriden Mehrkörpersysteme führt. Hierzu wurde in den letzten Jahren eine Methode etabliert, die in zahlreichen Mehrkörpersimulationsprogrammen implementiert ist und die es gestattet, linear elastische Strukturen durch Ersatzmodelle mit endlich vielen Freiheitsgraden abzubilden.

## Einleitung

Ein Bestreben der Automobilindustrie besteht darin, bereits in frühen Entwicklungsstadien umfassende numerische Simulationen durchzuführen, um das Systemverhalten der Fahrzeuge berechnen und optimieren zu können. Hierzu werden neben aerodynamischen Simulationstechniken die etablierten Disziplinen wie die Mehrkörperdynamik und die Methode der finiten Elemente eingesetzt. Neuerdings gibt es intensive Bestrebungen, das niederfrequente Akustik- und Geräuschverhalten von Fahrzeugen bei Fahrten auf rauen Straßenoberflächen zu simulieren. Von besonderem Interesse ist die entwicklungsbegleitende Simulation des Lebensdauerhaltens von Aggregate- und Fahrwerkbauteilen

sowie von Karosseriestrukturen. Eine für solche Simulationsaufgaben wichtige Voraussetzung ist das Vorhandensein von Komponentenmodellen für Stoßdämpfer, Luftfedern, Elastomer- und Hydrolager, die in der Lage sein müssen, die innerhalb des relevanten Frequenzbereiches auftretende Dynamik der entsprechenden Bauteile abzubilden. Weitere wichtige Elemente sind Reifenmodelle, die zur Fahrzeugsimulation auf unebenen Teststrecken eingesetzt werden können. In diesem Umfeld wurden in den vergangenen Jahren zahlreiche Ansätze entwickelt und in Mehrkörpersimulationsprogramme implementiert (z.B. Eichler et al. 2003, Lion und Loose 2002, Böhm et al. 1988, Eichler 1996, Eichler 1997, etc.)

Eine verbreitete Möglichkeit, das Betriebsfestigkeits- sowie das NVH Verhalten von Gesamtfahrzeugen zu simulieren, besteht in der Anwendung von Mehrkörpersimulationstechniken mit Starrkörpersystemen und seit einigen Jahren auch mit hybriden Modellen (z.B. Hirschberg 1998, Lang und Riepl 2000, Eichler und Lion 2000, Kaps et al. 2002, Lion 2005). Da es bei vielen Anwendungen aufgrund von Überlappungen der Anregungs- und Eigenfrequenzspektren unzutreffend ist, die Karosserien als starre Körper abzubilden, muss ihre Flexibilität berücksichtigt werden. In Lion (2005) wurde eine Methode dargestellt, die es ermöglicht, mit komplexen Gesamtfahrzeugmodellen digitalisierte Teststrecken abzufahren. Ein Straßenabschnitt eines digitalisierten Schlechtwegkurses ist in Bild 2 dargestellt.

Die beiden in Bild 1 dargestellten spektralen Leistungsdichten von Radkräften wurden durch eine Gesamtfahrzeugsimulation auf dem digitalen Prüfkurs ermittelt. Im Frequenzbereich zwischen 10Hz und ca. 50Hz liegen ungefähr 70 Eigenmoden der Karosserie

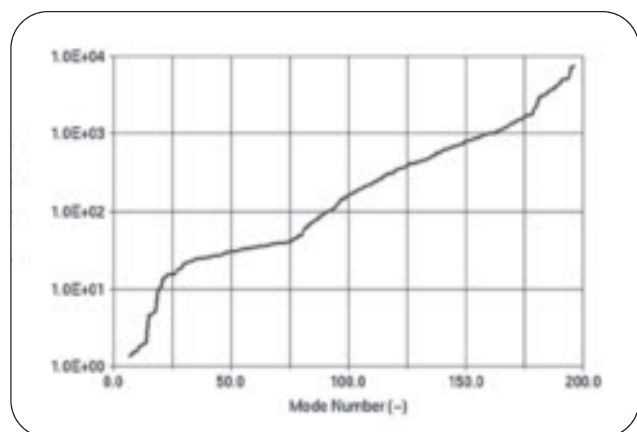
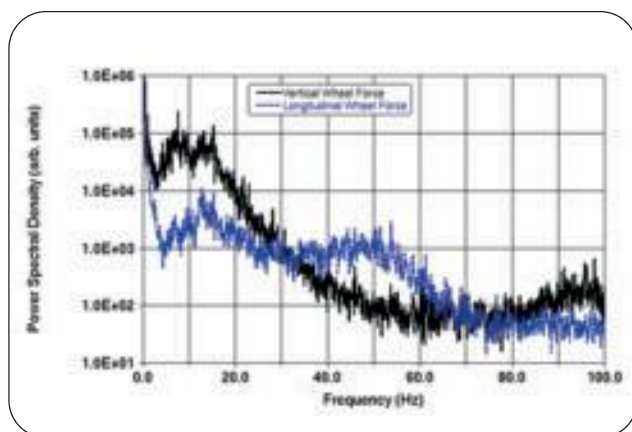


Bild1: Beispiel von überlappenden Anregungs- und Eigenfrequenzspektren



Bild 2:  
Fahrzeugmodell  
auf virtuellem  
Schlechtwegkurs

(rechte Abbildung). Die linke Abbildung zeigt, dass die Intensität der Radkräfte in diesem Frequenzbereich relativ hoch ist. Es muss also damit gerechnet werden, dass Teile der Karosserie zu lokalen Schwingungen angeregt werden, womit die Starrkörperannahme nicht mehr zutreffend wäre.

**Abbildung linear elastischer Strukturen in der Mehrkörperdynamik**

Bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen von Starrkörpersystemen wird davon Gebrauch gemacht, dass ein Starrkörper in Abhängigkeit von seinen Lagerungen maximal sechs Freiheitsgrade besitzt. Ein deformierbarer Körper ist dagegen ein Kontinuum, das unendlich viele Freiheitsgrade besitzt. Von daher ist es schwer möglich, Kontinua in die Starrkörpermechanik einzubinden. Um dies näherungsweise realisieren zu können, werden die orts- und zeitabhängigen Deformationen des betreffenden Kontinuums relativ zu einem mitbewegten gedachten Starrkörper durch einen globalen Ritz-Ansatz abgebildet. Dabei wird die Annahme getroffen, dass der deformierbare Körper linear elastisch ist und die sich einstellenden Verschiebungen und Verzerrungen hinreichend klein sind, so dass relativ zur bewegten Referenzkonfiguration eine lineare Kontinuumstheorie angewendet werden darf. Die Diskussion der Details und die Formulierung der Systemgleichungen würden den Rahmen dieses Artikels deutlich übersteigen (siehe hierzu z.B. Maißer (1996), Shabana (1994, 1998) oder Lion (2006)).

**Bestimmung der Formfunktionen des Ritz-Ansatzes nach Craig-Bampton**

Wesentlich für die Methode, elastische Strukturen in Mehrkörpersysteme zu integrieren, ist der globale Ritz-Ansatz zur Darstellung des elastischen Verschiebungsfelds. In Folgendem geht es darum, einen Ritz-Ansatz bzw. Satz von Formfunktionen zu ermitteln, so dass beliebige an der betrachteten Struktur vorliegende geometrische Randbedingungen erfüllt werden können. Eine einleuchtende Möglichkeit besteht darin, die Eigenformen der freien Struktur zu verwenden. Diese Methode hat aber den Nachteil, dass zur exakten Erfüllung der geometrischen Randbedingungen meist sehr viele Moden benötigt werden. Um mit deutlich weniger Ansatzfunktionen auszukommen, muss die Modalbasis durch geeignete Funktionen erweitert werden. Es hat sich durchgesetzt, hierzu die Craig-Bampton Methode zu verwenden. Eine elastische Finite Elemente Struktur unterliegt im Allgemeinen geometrischen und dynamischen Randbedingungen und besitzt sowohl innere Knoten als auch Randknoten. Sämtliche Verschiebungsvektoren der inneren Knoten

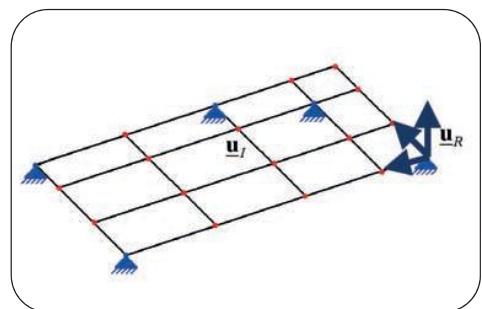
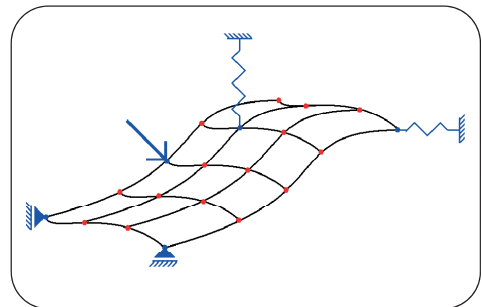


Bild 3: Prinzipskizze einer allgemeinen elastodynamischen Struktur

werden zu einem Spaltenvektor  $\mathbf{u}_I$  zusammengefasst und die aller Randknoten zu einem Spaltenvektor  $\mathbf{u}_R$ . Zwischen den, an allen inneren Knoten und Randknoten, angreifenden Kräften und Verschiebungen vermittelt die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{RR} & \mathbf{c}_{RI} \\ \mathbf{c}_{IR} & \mathbf{c}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} \tag{Gl. 1}$$

Da an den inneren Knoten keine externen Kräfte angreifen, d.h.,  $\mathbf{F}_I = \mathbf{0}$ , gibt man sich nun gedanklich die Randverschiebungen  $\mathbf{u}_R$  vor (auch an den Stellen, an denen dynamische Kraftrandbedingungen vorliegen) und berechnet für sie die inneren Knotenverschiebungen.

$$\mathbf{u}_I = -(\mathbf{c}_{II})^{-1} \mathbf{c}_{IR} \mathbf{u}_R =: \mathbf{\Phi}_I \mathbf{u}_R \tag{Gl. 2}$$

Die in der Matrix  $\mathbf{\Phi}_I$  zusammengefassten Anteile werden als statische Moden bezeichnet. Gibt man sich in mehreren Finite Elemente Analysen der Reihe nach immer eine skalare Randverschiebung vor, d.h. eine Komponente des Vektors  $\mathbf{u}_R$  und lässt alle anderen bei Null, so kann man anhand der sich ergebenden inneren Verschiebungen  $\mathbf{u}_I$  alle Elemente der Matrix  $\mathbf{\Phi}_I$  ermitteln. Einen zweiten Satz von Formfunktionen  $\mathbf{\Phi}_R$  welcher die struktur-

Bild 4: Hybrides Mehrkörpermodell einer Verbundlenkerhinterachse

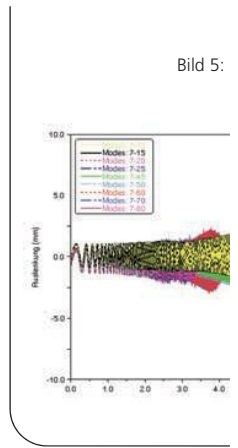
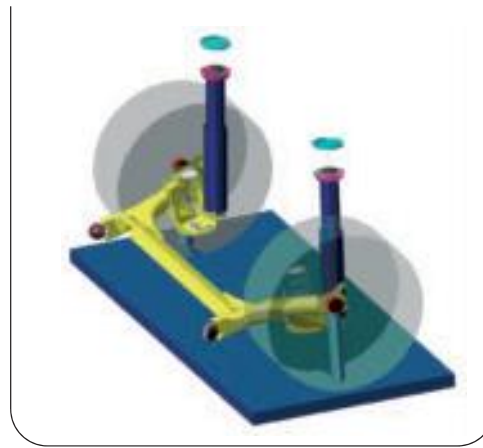


Bild 5:

dynamischen Eigenschaften beinhaltet, erhält man, indem man die Struktur an allen externen Knoten geometrisch fest einspannt, d.h.  $\underline{\underline{u}}_e = \underline{\underline{0}}$  und das dynamische Eigenwertproblem für die inneren Knoten löst:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{u}}}_i + \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\dot{u}}}_i = \underline{\underline{0}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{\Phi}}_i e^{i\Omega t} \quad \text{Gl. 3}$$

Dabei ist  $\underline{\underline{\Phi}}_i = [\underline{\underline{\Phi}}_{i,1} \dots \underline{\underline{\Phi}}_{i,N}]$  die Anordnung aller Eigenvektoren zu einer Matrix.

Nun werden die Formfunktionen aus beiden Verfahren linear zu einem allgemeinen Ritz-Ansatz kombiniert: Die inneren Verschiebungen  $\underline{\underline{u}}_i$  werden als Linearkombination der statischen und der dynamischen Moden unter festen Einspannrandbedingungen dargestellt und die beiden Spaltenvektoren  $\underline{\underline{p}}_s$  und  $\underline{\underline{p}}_d$  werden als modale Koordinaten aufgefasst. Gl. 4

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}_s \\ \underline{\underline{u}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\Phi}}_s & \underline{\underline{\Phi}}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{p}}_s \\ \underline{\underline{p}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{p}}_s \\ \underline{\underline{\Phi}}_s \underline{\underline{p}}_s + \underline{\underline{\Phi}}_i \underline{\underline{p}}_i \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{p}}$$

Eine Eigenschaft dieses Ansatzes ist, dass die Formfunktionen bzw. die Spalten der Matrix nicht orthogonal zueinander sind. Um eine Orthogonalisierung durchzuführen, wird die Systemgleichung der freien Struktur formuliert und deren Eigenvektoren gesucht: Gl. 5

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{s,s} & \underline{\underline{M}}_{s,i} \\ \underline{\underline{M}}_{i,s} & \underline{\underline{M}}_{i,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{u}}}_s \\ \underline{\underline{\ddot{u}}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{c}}_{s,s} & \underline{\underline{c}}_{s,i} \\ \underline{\underline{c}}_{i,s} & \underline{\underline{c}}_{i,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{u}}}_s \\ \underline{\underline{\dot{u}}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_s \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{u}}} + \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\dot{u}}} = \underline{\underline{f}}$$

Dies führt für  $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}}$ , d.h. ohne externe angreifende Kräfte, auf die folgende Schwingungsgleichung:

$$(\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}}) \underline{\underline{\ddot{p}}} + (\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{c}} \underline{\underline{\Phi}}) \underline{\underline{\dot{p}}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{Gl. 6}$$

Mit dem komplexen Exponentialansatz  $\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{\hat{p}}} e^{i\omega t}$  erhält man die Eigenfrequenzen  $\omega_1, \dots, \omega_N$  der freien Struktur sowie die dazugehörigen Eigenvektoren, die zu einer Matrix angeordnet werden:

$$\underline{\underline{N}} = [\underline{\underline{\hat{p}}}_1 \underline{\underline{\hat{p}}}_2 \dots \underline{\underline{\hat{p}}}_{N-1} \underline{\underline{\hat{p}}}_N] \quad \text{Gl. 7}$$

Damit gilt insgesamt die Beziehung

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{p}} = (\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{N}}) \underline{\underline{q}}, \quad \text{Gl. 8}$$

die den Zusammenhang zwischen den modalen Koordinaten und den Verschiebungen der Knotenpunkte der elastodynamischen Struktur darstellt. Zu diesem Verfahren ist anzumerken, dass der

durch die Eigenformen der an den externen Knoten fest eingespannten Struktur aufgespannte Modalraum durch die statischen Moden angereichert wurde. Dadurch sind mit einer vergleichsweise geringen Anzahl von Formfunktionen allgemeine geometrische Randbedingungen erfüllbar. Durch die Orthogonalisierung geht keinerlei Information verloren, sie wird nur anders auf die Formfunktionen verteilt.

### Modellierung einer Verbundlenkerachse als flexible Struktur

Um das Verfahren zur Berücksichtigung elastischer Strukturen in Mehrkörpersystemen zu veranschaulichen, wird ein Beispiel aus der Fahrzeugtechnik behandelt. In vielen Fahrzeugen werden Verbundlenkerhinterachsen eingesetzt. Sie bestehen aus zwei steifen Radträgern, die durch ein torsionsweiches Profil mit V-förmigem Querschnitt verbunden sind (siehe Bild 4). Zur Modellierung solcher Achsen wird der Achskörper als elastisches Bauteil modelliert. Das orts- und zeitabhängige Verschiebungsfeld wird durch Superposition von Ritz-Ansätzen im Sinne des Craig-Bampton Verfahrens dargestellt. Diese werden vor der Mehrkörpersimulation mit einem Finiten Elemente Programm ermittelt.

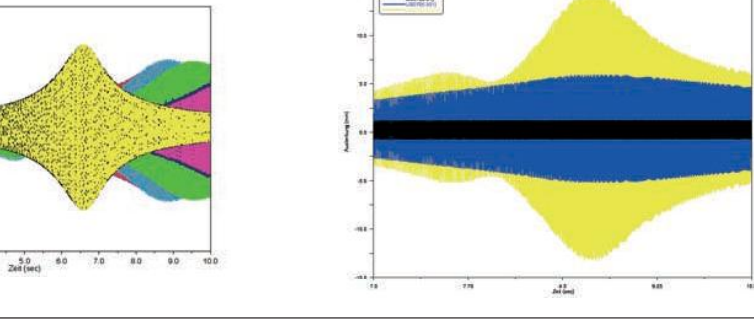
Anzahl der Moden	Eigenfrequenz (Hz)
4	66
9	66
14	112
19	109
39	97
44	90
54	88
64	88
74	88

Tabelle 1: Eigenfrequenz der Achse als Funktion der Anzahl der Modes, die berücksichtigt wird

Bild 5 zeigt links die Antwort der Verbundlenkerachse auf eine sinusförmige verschiebungsgesteuerte Anregung in Vertikalrichtung am rechten Hinterrad. Die Belastungsamplitude war konstant und die Frequenz wurde hinreichend langsam und linear mit der Zeit von 1Hz auf 100Hz hochgefahren. In der Abbildung ist die vertikale Verschiebung der Mitte des V-Profiles für verschiedene Anzahlen von Moden über der Zeit aufgetragen. Dabei bedeutet die Bezeichnung „Modes 7-60“, dass Moden mit den Nummern von 7 bis 60 in die Berechnung einbezogen wurden, es wurden also 54 Modes berücksichtigt.

In Tabelle 1 sind die mittels Mehrkörpersimulation berechneten Frequenzlagen der Amplitudenmaxima über der Anzahl der Moden

Simulationen mit unterschiedlichen Anzahlen von Moden



dargestellt, mit denen der Verbundlenker abgebildet wurde. Man erkennt, dass bei den Berechnungen mit nur 4 oder nur 9 Moden das Maximum bei gut 65Hz liegt. Erhöht man die Anzahl der Moden (Freiheitsgrade des Achskörpers), so verschiebt sich das Maximum zu höheren Frequenzen, bis es sich bei knapp 90Hz einpendelt. Man kann diesen Simulationen also entnehmen, dass man etwa 50 Moden der Achse berücksichtigen muss, bis das Verhalten konvergiert. Das Hinzufügen weiterer Moden bringt in diesem Beispiel keine Verbesserung der Ergebnisse. Außerdem erkennt man, dass das dynamische Verhalten der Achse im Frequenzbereich weit unterhalb der ersten Resonanzfrequenz nur sehr wenig von der Anzahl der Moden abhängt. In einer weiteren Studie wurden die Dämpfungen der Verbundlenkerachse variiert, die den Moden in der Mehrkörpersimulation zugeordnet werden können. Um die Untersuchung zu vereinfachen, wurde eine Verteilung zugrunde gelegt, bei der die modalen Dämpfungen linear von den Eigenfrequenzen der ungedämpften Moden abhängen (höherfrequente Moden werden höher bedämpft).

### Schlussbemerkungen

Dieses Anwendungsbeispiel aus der Fahrzeugdynamik hat gezeigt, dass die Verwendung hinreichend vieler Formfunktionen zur Darstellung des dynamischen Verhaltens elastischer Strukturen in hybriden Mehrkörpersystemen notwendig ist. Um einen sinnvollen Wert für die notwendige Anzahl von Modes zu gewinnen, wurde das Konvergenzverhalten der Eigendynamik einer Hinterachse als Funktion der Anzahl der zugrunde gelegten Moden untersucht. Bezüglich der Zahlenwerte für die modalen Dämpfungen wurde eine Parameterstudie durchgeführt. Wenn die elastische Struktur in der Nähe von Resonanzen angeregt wird, hängt die Antwort stark von den Dämpfungen ab. Bei Anregungen weit unterhalb von Resonanzen sind die Antworten für nicht zu große Dämpfungen unabhängig von den Dämpfungen. Um verlässliche Werte für die Dämpfungen zu gewinnen und um sicherzustellen, dass die modalen Dämpfungen mit dem Strukturmodell konsistent sind, sollten sie anhand einer komplexen Eigenwertanalyse des Finiten Elemente Strukturmodells berechnet werden. In diesem Modell müssen die lokalen Dämpfungsmechanismen abgebildet sein. In Lion (2005) wurde eine entsprechende Methode angewendet, mit der die modalen Dämpfungen einer ausgestatteten Fahrzeugkarrosserie berechnet wurden, um das Lebensdauerverhalten zu simulieren. Für zukünftige Entwicklungsprojekte in der Automobilindustrie wäre es sehr interessant, deformierbare Strukturen mit allgemeineren Materialeigenschaften, auch bei finiten Deformationen, in Mehrkörpersysteme einbinden zu können. Eine wichtige Anwendung wäre beispielsweise die Simulation der Betriebsfestigkeitseigenschaften von statisch und dynamisch hoch beanspruchten Elastomerlagern in Fahrwerken oder im Bereich der Aggregate. ◀

### References

- [1] Böhm, F., Eichler, M., Knoch, K.: Grundlagen der Rollodynamik von Luftreifen, Fortschritte der Fahrzeugtechnik 1, W. Stühler (Hrsg.): Fahrzeugdynamik, Vieweg Verlag, 1988.
- [2] Eichler, M., Lion, A., Schuller, R., Sonnack, U.: Dynamik von Luftfedersystemen mit Zusatzvolumen. VDI Tagung Reifen-Fahrwerk-Fahrbahn, 29. und 30. Oktober 2003.
- [3] Eichler, M., Lion, A.: Gesamtfahrzeugsimulationen auf Prüfständen zur Bestimmung von Lastkollektiven, VDI Bericht 1559, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, 369-398, 2000.
- [4] Eichler, M.: A ride comfort tyre model for vibration analysis in full vehicle simulations, Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, Berlin, ISSN 0042-3114, 1997.
- [5] Eichler, M.: Ride comfort calculations with adaptive tyre models, AVEC, International Symposium on Advanced Vehicle Control, Aachen, 1996.
- [6] Hirschberg, W.: Modellbildung und Simulation von Schlechtwegen: Entwicklungsmethoden und Simulation, Steyr-Daimler-Puch Fahrzeugtechnik AG, 1998.
- [7] Kaps, L., Lion, A., Stolze, F., Zhang, G.: Ganzheitliche Analyse von Fahrzeugprototypen mit Hilfe von virtuellen Fahrzeugmodellen und virtuellen Prüfständen, VDI Bericht 1701, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, 2002, 653-678.
- [8] Lang, M., Riepl, A.: Einsatz der FEM-MKS Kopplung im Betriebsfestigkeitsentwicklungsablauf, Steyr-Daimler-Puch Fahrzeugtechnik AG, 2000.
- [9] Lion, A.: Einsatz flexibler Körper in der numerischen Lebensdauersimulation von Kraftfahrzeugen: Methoden, Beispiele und offene Fragen, NAFEMS Magazin, 2005, 21-31.
- [10] Lion, A., Loose, S.: A thermomechanically-coupled model for automotive shock absorbers: theory, experiments and vehicle simulations on test tracks, Vehicle Syst. Dynamics, 37, 2002, 241-261.
- [11] Lion, A.: Flexible Mehrkörpersysteme in der Automobilindustrie: Erfahrungen und Anwendungen, 24th CADFEM Users' Meeting 2006, International Congress on FEM Technology, October 25-27, Schwabenlandhalle Stuttgart/ Fellbach, Germany.
- [12] Maißer, P.: Dynamik hybrider Mehrkörpersysteme aus kontinuumsmechanischer Sicht, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 76, 1996, 15-33.
- [13] Maißer, P., Jungnickel, U., Grund, T.: Elastische Komponenten in MKS-Tools am Beispiel von Alaska, NAFEMS Magazin, 1, 2005, 12-17.
- [14] Shabana, A.: Computational Dynamics, John Wiley & sons, 1994.
- [15] Shabana, A.: Dynamics of Multibody Systems, Cambridge University Press, 1998.

### Autor

Prof. Dr.-Ing. Alexander Lion  
 Universität der Bundeswehr München,  
 Institut für Mechanik LRT 4