

# Wem gehört die Zukunft: h-Elementen oder p-Elementen?

Dr.-Ing. Wilhelm Rust  
Dr.-Ing. Günter Müller  
Grafing bei München

**I**n letzter Zeit wird in Zeitschriften und in Marketingbrochüren oft von der Geometrie-Elemente-Analyse (GEA) oder Geometric-Element-Method (GEM) gesprochen, die auf sogenannten p-Elementen basiert. Dabei werden diese Verfahren als revolutionär neue Methoden dargestellt. Von den meisten der gängigen Finite-Elemente-Programme wird dagegen behauptet, daß sie auf einer veralteten zwanzigjährigen Technologie basieren /1/, /2/, /3/, /4/. Dabei verkennen oder leugnen die Autoren die Funktionalität der führenden FE-Programme. Hier soll aufgezeigt werden, unter welchen Bedingungen und in welchen Anwendungsfällen p-Elemente

eine sinnvolle Ergänzung der Standard-FE-Methode darstellen können. Dazu werden einige Grundlagen erläutert, die zum Verständnis beitragen. Außerdem wird insbesondere auf die Frage eingegangen, ob die p-Methode einfacher und zuverlässiger als die h-Methode ist.

Zur Funktionalität moderner FE-Programme gehört unter anderem eine geometriebasierende Modellerstellung mit automatischer Vernetzung, bei der die Netzgüte stets kontrolliert wird, genauso wie die Übernahme von CAD-Daten für das Geometriemodell, so daß eine Verknüpfung von Konstruktion und Berechnung möglich ist. Ferner wird der Zusammenhang zwischen Geometriemodell und FE-Netz über die Rechnung hinaus erhalten, so daß geometriebezogene Auswertungen vorgenommen und Formoptimierungen durchgeführt werden kön-

nen. Die automatische Anpassung der Vernetzung an die Erfordernisse der Lösung aufgrund von Fehlerabschätzungen ist ebenfalls gegeben. Dies alles ist nicht erst mit der Vermarktung der p-Methode eingeführt worden oder gar von dieser abhängig. Bei komplexeren Berechnungen unter Berücksichtigung zeitlicher Vorgänge, nichtlinearen Materialverhaltens, von Faserverbundkonstruktionen, hyperelastischem Material, Kontaktproblemen, großen Verformungen sowie für Lösungen von Magnetfeldproblemen, Akustik, Strömung, gekoppelten Feldern werden derzeit noch kaum p-Elemente eingesetzt.

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) oder Finite-Elemente-Analyse (FEA) ist ein mit bereichsweisen Näherungen arbeitendes numerisches Verfahren zur Lösung der Differentialgleichungen, mit denen das Verhalten von Strukturen beschrieben wird. Als Näherungslösung für die einzelnen Bereiche, nämlich die Finiten Elemente, werden Ansatzfunktionen (Polynome) mit freien Parametern eingeführt. Die Ansatzfunktionen müssen gewisse Bedingungen erfüllen. Die freien Parameter werden durch eine Extremalbedingung (Energieprinzip) bestimmt, welche auf ein algebraisches Gleichungssystem führt. Dabei besteht die Wahl, entweder mit wenigen Bereichen, aber höheren Ansatzfunktionen oder mit einfacheren Ansatzfunktionen, aber mehr Bereichen (Elementen) eine Lösung zu erzielen.

Ritz versuchte mit einem Ansatz das ganze zu berechnende Gebiet

aus:  
Computer Graphics Market  
Nr. 95/96  
Dressler-Verlag

abzudecken und durch eine Steigerung der Polynomordnung eine Genauigkeitsverbesserung zu erreichen, was aber nur bei sehr einfachen Geometrien erfolgreich sein kann. Das ist der Grundgedanke der p-Methode. Courant hat im Jahre 1943 die Idee von Ritz aufgegriffen, hat aber versucht, anstelle einer Erhöhung der Polynomordnung mit einer Unterteilung des Gebietes in Bereiche (Elemente) genauere Ergebnisse zu erzielen.

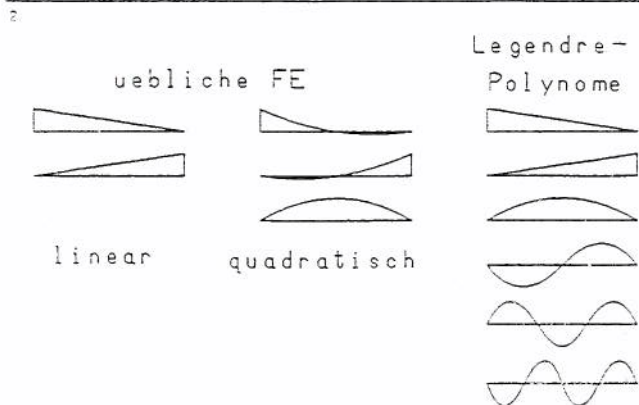
Courant kann somit als Wegbereiter der FEM gesehen werden. Erst die Unterteilung in Finite Elemente hat diesem numerischen Verfahren zum Durchbruch verholfen. Weil jede mit Finiten Elementen gleich weicher Art erzielte Lösung nur eine Näherung ist, stellt sich die Frage nach der Genauigkeit. Diese hängt ab von der Elementdichte (Anzahl) und der Güte der verwendeten Elemente (Ansatzfunktionen). Eine gewünschte Genauigkeitssteigerung kann auf verschiedene Weise erreicht werden:

- einerseits durch Verdichtung, das heißt eine Erhöhung der Elementanzahl (h-Methode) und
- andererseits durch Erhöhung der Polynomordnung der Ansatzfunktionen (p-Methode).

Elemente mit höhergradigen Ansatzfunktionen sind nichts Neues. Zienkiewicz stellt in seinem Buch /5/ im Kapitel über »Element Shape Functions« eine ganze Reihe von Ansätzen mit höherwertigen Polynomen zusammen. Ein beliebiger Ansatzgrad kann im Prinzip durch eine entsprechende Anzahl von Knoten je



Bild 1: Oben sind die Grundmoden (1), Kantenmoden (2) und »Bubble-Moden (3) dargestellt, unten die Ansatzfunktionen der p-Methode.



Element erreicht werden. Für ein adaptives, das heißt ein an die Lösung angepaßtes, Vorgehen reicht das jedoch nicht aus. Die p-Elemente, wie sie heute meist Verwendung finden, wurden im Jahr 1978 erstmals von Peano /6/ am Instituto Sperimentale Modelli e Strutture (ISMES) in Bergamo eingeführt.

### Welche Eigenschaften unterscheiden die p- von der h-Methode?

Welche Eigenschaften unterscheiden nun die p- von der h-Methode? Ein wesentlicher Aspekt ist die Konvergenzordnung, das heißt wie sich die Genauigkeit bei Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade verändert. Unter bestimmten Voraussetzungen,

wenn beispielsweise keine singulären Störungen vorliegen, verändert sich bei Scheiben und Volumina der Fehler in den Verschiebungen mit  $hp+1$  (h: Netzweite, p: Polynomordnung). Das spräche unbedingt für die p-Methode, wenn da nicht die in den interessanteren Fällen nicht erfüllten Voraussetzungen für diese Eigenschaft wären und nicht folgender Punkt hinzukäme: Bei der p-Methode steigt die Bandbreite schneller und führt zu einem Aufwand bei der Gleichungslösung proportional  $N^3$ , während er bei der h-Methode nur bei  $N^2$  liegt (bei Flächen, N Anzahl der Freiheitsgrade). Das ist bestimmend für die Gesamtrechenzeit. Zusätzlich dauert der Aufbau der Elementmatrizen umso länger, je höher die Ansatzordnung ist. Was

Der Anwender möchte aber eine gewisse Genauigkeit in möglichst kurzer Zeit zu erreichen. Der Vergleich kann zugunsten der einen wie der anderen Methode ausgehen. Kommerzielle FE- Programmsysteme haben fast ausnahmslos zunächst die h-Methode verfolgt, wobei die Elementansätze meist nur linear oder quadratisch und nur in Ausnahmefällen auch kubisch angenommen wurden.

Dafür gibt es eine Reihe von Gründen. Neben einer genauen Approximation der gesuchten Funktion muß eine genügend genaue Abbildung der Geometrie erfolgen. Mit p-Elementen geht das nur gut, solange die Geometrie genügend glatt ist. Damit sind der Elementgröße Grenzen gesetzt. Außerdem sind bei der Elementformulierung Ableitungen und Integrale zu bilden. Wegen der Berücksichtigung beliebiger Ele-

mentgeometrien sind die Ableitungen und damit die daraus gebildeten Integranden keine Polynome mehr. Die Integration erfolgt numerisch und ist nur für Polynome genau. Das bedeutet, daß die verwendeten Funktionen möglicherweise die Geometrie richtig beschreiben, diese Genauigkeit aber bei der Integration verloren gehen kann.

### Die p-Methode bietet weniger Punkte zur Spannungsauswertung an

Wegen der abstrakteren Unbekannten bei p-Elementen ist es schwieriger, Randbedingungen (Festhaltungen) zu formulieren und Lagerreaktionen zu berechnen. Auch das Postprocessing, die flächenhafte Darstellung der Ergebnisse, ist erschwert. Das sind lösbare Probleme: die Integration in ein »nor-

males« FE-Programm - und nur das ist sinnvoll - wird jedoch erschwert.

Schälenelemente nach der p-Methode mit ähnlich guten Konvergenzeigenschaften wie bei Volumina sind nicht bekannt. Dafür ist das Locking verantwortlich, also die Versteifung der Elemente dadurch, daß es zu einer Kopplung zwischen der großen Schub- und MembranstEIFigkeit und der demgegenüber kleinen BiegestEIFigkeit kommt. Die Beseitigung dieses Phänomens erfordert Maßnahmen, die nicht für beliebige Ansätze verallgemeinerbar sind. Wegen dieses Effektes steigen die erforderlichen Ansatzgrade stärker an, so daß ein Rechenzeitvorteil gegenüber der h-Methode kaum erzielbar ist. Die p-Methode ist auf lineare Berechnungen beschränkt. Das ist nicht unumstößlich, es würden jedoch Kriterien für die Wahl der Ansatzordnung benötigt, die für Nichtlinearitäten abgesichert sind.

Ein größeres Problem stellt die Plastizität dar. Hier kommt es zu Funktionsverläufen, die nicht genügend glatt sind, um sie mit Polynomen höherer Ordnung anzunähern. Außerdem sind bei der p-Methode insgesamt weniger Integrationspunkte vorhanden, an denen die Spannungen ausgewertet werden und festgestellt wird, ob Fließen vorliegt oder nicht. Bei der Berechnung von Kontaktproblemen mit Hilfe von Elementen mit linearem Ansatz wird geprüft, ob Knoten die Elementkanten oder -oberflächen durchdringen. Bei höheren Ansätzen genügt das nicht, weil die Oberflächen gekrümmt sein und größere Winkel

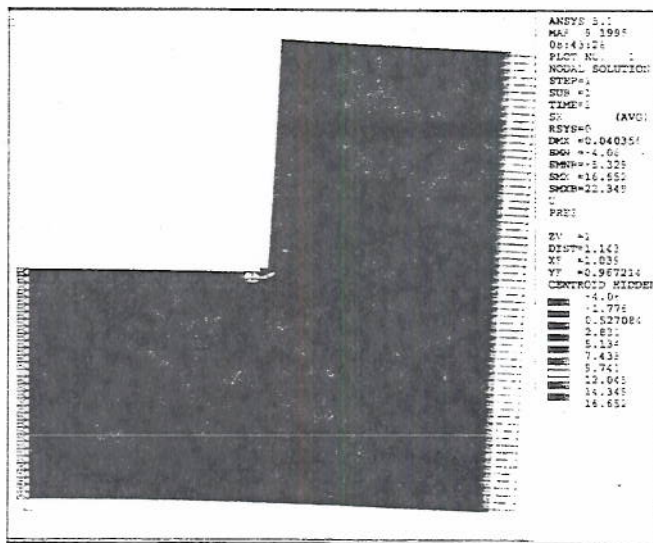


Bild 2: Referenzlösung mit einem gleichmäßig feinen Netz (Bild CAD-FEM, Graßing bei München)

überspannen können. Daher muß auch die Durchdringung zweier Oberflächen direkt geprüft werden.

Zu den bisher genannten Problemen wird der Fachwelt noch eine Reihe offener Fragen vorgelegt /7/. Beispielsweise fehlen Erfahrungen und das Wissen, was passiert, wenn für die Geometrie und die Verschiebungen Polynome unterschiedlicher Ordnung verwendet werden. Insbesondere interessiert die Frage, ob bei Starrkörperverschiebungen Dehnungen induziert werden können. Ferner ist zu klären, ob die Vernetzung mit p-Elementen wirklich schneller als mit den üblichen Elementen erfolgt. Sind genügend Erfahrungen vorhanden, die belegen, daß auch bei extremen Elementgeometrien, wie sie zum Beispiel bei Formoptimierungen auftreten können, ein Neuvernetzen der Geometrie nicht erforderlich ist? Ebenso unklar ist, was passiert, wenn die vorgegebene Ordnung der p-Elemente nicht ausreicht, einen lokalen Gradienten hinreichend anzunähern.

### Automatische Steigerung der Genauigkeit durch die adaptiven Verfahren

Die p-Methode muß im Zusammenhang mit adaptiven Algorithmen gesehen werden. Die Netzdichte oder der Ansatzgrad müssen nicht überall gleich gesteigert werden, sondern nur, wo der Verlauf der Lösung es erfordert. Ein Verfahren, welches dies berücksichtigt wird »adaptiv« genannt. Dabei werden folgende Varianten unterschieden:

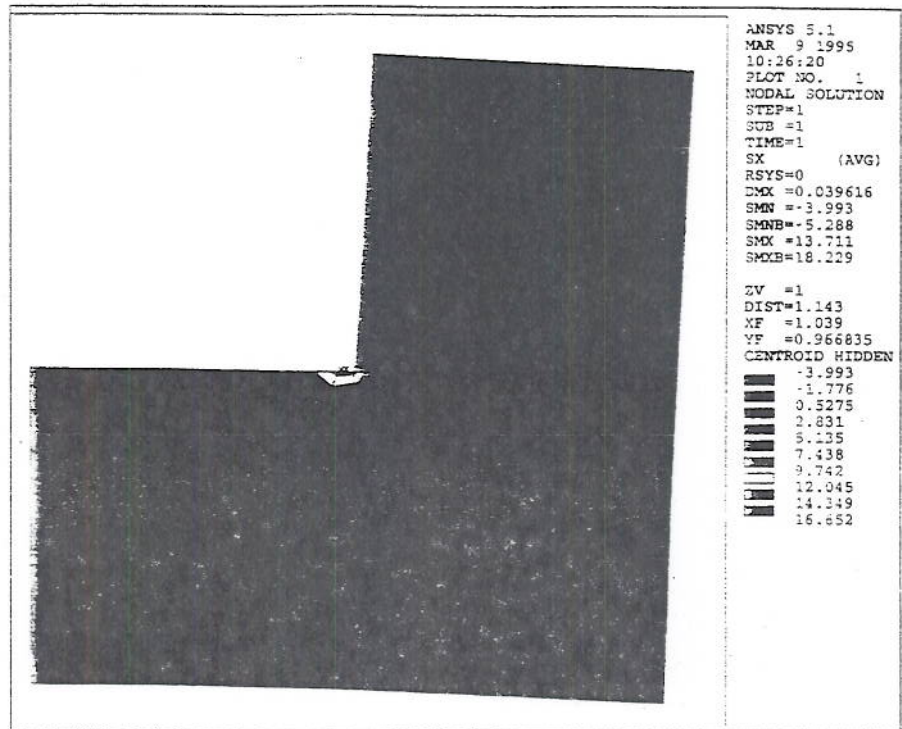


Bild 3. Das Netz bei Energiekonvergenz in allen drei Teilbereichen (Bild C-AD-FEM, Graefing b. München)

1) Die Gestalt der Elemente wird verändert, indem die vorhandenen Elementknoten verschoben werden (r-Adaptivität).

2) Die Elemente werden lokal verdichtet (h-Adaptivität). Das Problem dabei ist, daß auch die Übergänge zwischen feinen und groben Bereichen vernetzt werden müssen, was aber zumindest für Flächen befriedigend gelöst ist /8/.

3) Es erfolgt eine automatische Neuvernetzung mit veränderten Steuerparametern. Dies ist beliebt, wenn ein Programm über einen automatischen Vernetzer verfügt, weil

dadurch ein adaptives Verfahren leicht eingebaut werden kann. Da hier sowohl die Elementanzahl erhöht als auch die Lage der Knoten verändert wird, kann man diese Methode als hr-Adaptivität bezeichnen.

4) Auch bei der lokalen Ansatzgraderhöhung (p-Adaptivität) stellt sich das Problem der Übergänge zwischen den Elementen, wenn diese eine unterschiedliche Ansatzordnung aufweisen. Auf die Lösung wird weiter unten eingegangen.

5) Zusätzlich ist eine Kombination der oben genannten Strategien möglich (hp-Adaptivität).

Wie schon erwähnt, ist für die p-Adaptivität wichtig, daß die Übergänge zwischen Elementen mit unterschiedlicher Ansatzordnung richtig behandelt werden. Bei Elementen mit festem Polynomgrad sind die freien Parameter die primären Freiheitsgrade (wie Verschiebungen) an den Knoten. Der nächste Schritt wären hierarchische Ansätze, bei denen die den ursprünglich vorhandenen Knoten zugeordneten Funktionen erhalten bleiben, während diejenigen höherer Ordnung nur mit neu hinzukommenden Knoten verknüpft werden. Die Freiheitsgrade sind dann nicht mehr die Verschiebungen am Ort des Knotens, sondern Zuwächse. Das funktioniert für den Übergang von linearen auf quadratische Ansätze. Für den kubischen Ansatz müßte aber der Mittenknoten weggelassen, dafür zwei neue eingeführt werden. Damit wäre

bereits das Ende der Ansatzhierarchie erreicht. Deshalb werden für p-Elemente Funktionen gewählt, die durch unterschiedliche Wellenzahl entsprechend der Ansatzordnung gekennzeichnet und mit einem abstrakteren Multiplikator verknüpft sind.

### Wie groß ist der Fehler in den Elementen gegenüber der exakten Lösung

Neben Sinus-Funktionen, die wegen der zu bildenden Integrale gemieden werden, bieten sich da spezielle Polynome, etwa Legendre-Polynome an (Bild 1) /9/. Die Ansätze werden aufgeteilt in solche, die Eckknoten, solche, die Elementkanten, und solche, die dem Elementinneren (Bubblemodes) zugeordnet sind. Für Kanten- und innere Funktionen können unterschiedliche Ansatzordnungen gewählt werden; für

den Übergang zwischen den Elementen müssen nur die Kantenansätze übereinstimmen.

Auf die Frage nach der Verlässlichkeit, die von den Vermarktern der p-Methode gern als Argument ins Feld geführt wird, soll hier ausführlicher eingegangen werden. Die adaptive Diskretisierung setzt voraus, daß das Programm erkennen kann, wo eine Netzverdichtung oder Ansatzerhöhung erforderlich ist, weil der Fehler zu hoch ist. Dazu wird eine lokale Fehlerabschätzung benötigt, das heißt, man will wissen, wie groß in einzelnen Elementen der Fehler gegenüber der exakten Lösung ist, die noch nicht bekannt ist. Das hört sich nach Orakeln an, es gibt aber Indizien für solche örtlichen Fehler

Eine Methode, die besonders beliebt, weil leicht zu implementieren ist, geht auf Zienkiewicz/Zhu zurück /10/. An den Rändern der finiten Elemente treten Spannungssprünge auf, die in Wirklichkeit nicht vorhanden sind; die genauesten Werte sind an den Integrationspunkten erhältlich. Deshalb ist es für das Postprocessing üblich, die Spannungen von dort zu den Knoten zu extrapolieren und da zu mitteln. Für die Fehlerbetrachtung werden diese gemittelten Spannungen mit denen verglichen, die sich aus dem Elementansatz errechnen lassen. Spannungen haben verschiedene Komponenten; um auf einen Wert für ein Fehlerkriterium zu kommen, wird die Energienorm (das ist die Wurzel aus der im Element gespeicherten Energie, deren Berechnung die Grundlage für die Elementformulierung ist) aus dieser

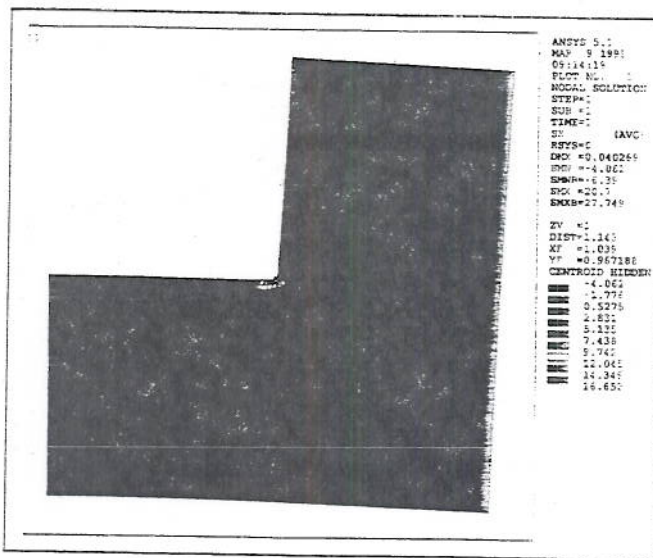


Bild 4. Dieses Netz wurde mit der h-Adaptivität automatisch erstellt. (Bild CAD-FEM, Gröning bei München).

Spannungsdifferenzen gebildet und mit der Energienorm aus den berechneten Spannungen selbst verglichen. Die dem Vernetzer vorgegebene Netzdichte wird nun so gewählt, daß überall ein gewünschter Prozentsatz unterschritten wird. Für höhergradige Ansätze ist das nicht ausreichend. Denn für eine seriöse Fehlerabschätzung wird zusätzlich zu den Spannungssprüngen das Residuum der Differentialgleichung benötigt, also ein Maß für deren Nichterfüllung. Daraus ergibt sich eine Reihe praktischer Probleme, beispielsweise wie beide Anteile gegeneinander zu gewichten sind.

Bei der p-Methode wird ein anderer Weg beschritten. Gestartet wird mit niedriger Polynomordnung und eine Lösung gesucht. Anschließend wird der Ansatzgrad um 1 erhöht und wieder eine Lösung gesucht. Danach wird auf Konvergenz abgefragt. Als allgemeines Kriterium wird die Energie in den einzelnen Elementen verglichen, die sich aus beiden Lösungen ergab. Verändert sie sich nur geringfügig, wird an der Polynomordnung festgehalten und nur in den restlichen Elementen der Ansatzgrad erhöht, bis überall Energiekonvergenz auftritt. Das Problem dabei ist, daß die p-Elemente groß sind und daher die Energie eine wenig lokale Größe ist, die durch begrenzte Spannungsspitzen nur geringfügig beeinflusst wird. So kann über kritische Stellen leicht hinweggerechnet werden. Das analoge Verfahren nach der h-Methode wäre, das Gesamtsystem in einige Gebiete zu zerlegen, zu rechnen, die Netzweite zu

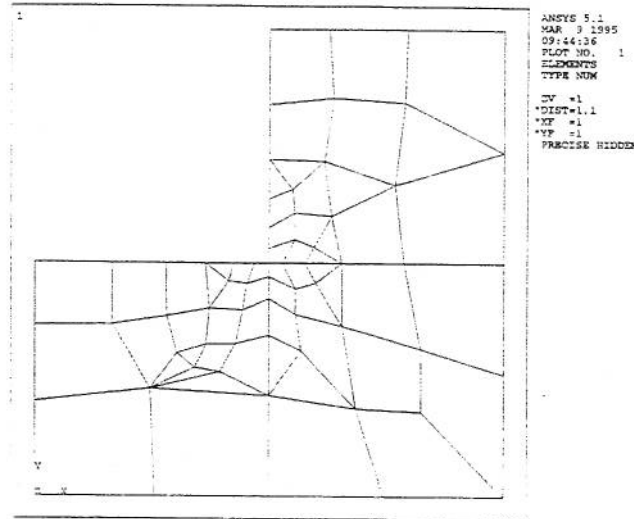


Bild 5: Auf der Grundlage der hp-Adaptivität wurde diese Netz automatisch erzeugt (Bild CAD-FEM, Graßing bei München).

halbieren, wieder zu rechnen und dann die Energie für die Teilgebiete zu vergleichen. Würde ein solches Vorgehen als lokale Fehlerabschätzung angeboten, würde man wohl nur Kopfschütteln ernten.

### Bei der p-Methode kann über kritische Stellen hinweggerechnet werden

Dies soll am Beispiel einer Scheibe mit einspringender Ecke gezeigt werden. Zunächst ist in Bild 2 das System und eine mit einem gleichmäßig feinen Netz aus linearen Elementen berechnete Spannungskomponente aufgetragen. Für die weiteren Berechnungen wird als Konvergenzschranke für die Energie jeweils die Voreinstellung von 5 % vorgegeben.

Bei der reinen p-Methode wird mit drei Elementen vom Ansatzgrad  $p = 2$  (quadratisch) gestartet, und es er-

gibt sich bereits bei  $p = 3$  Konvergenz (3,4 %). Damit läßt sich aber keineswegs 3 % Genauigkeit erreichen. Selbst die Verschiebung der rechten oberen Ecke weicht noch um 7,2 % von dem Wert ab, der sich mit einem feinen Netz oder den hp-Varianten ergibt. Ähnliches gilt für die Normalspannung am linken Rand. Beides sind Stellen, die von der kritischen Region um die einspringende Ecke weit entfernt sind, trotzdem taugt die Energie nicht als Genauigkeitsindikator.

Nun wird das gleiche mit der h-Methode versucht und dabei ein Vergleich der Energien in den Flächen, die den p-Elementen entsprechen, herangezogen. Nach der ersten Halbierung in zwölf Elemente ist nur die rechte untere Fläche nicht konvergiert. In den anderen liegt die Energieabweichung unter 1 %, obwohl alle die einspringende Ecke bein-

halten. Das Netz, das sich bei Energiekonvergenz in allen Flächen ergibt, zeigt *Bild 3*. Daran stört zum einen, daß die eine gesamte Fläche gleichmäßig verfeinert wird, obwohl in weiten Teilen eine glatte Lösung vorliegt, zum anderen, daß in den übrigen Flächen nur zufällig eine gewisse Verdichtung zur Ecke hin erfolgt. So geschieht es aber auch bei der p-Methode, nur ist es dort nicht erkennbar. Die Zahl der Freiheitsgrade erhöht sich entsprechend dem Ansatzgrad für das gesamte Element und nicht nur örtlich. Bei der p-Methode ist keine Möglichkeit vorhanden, auf Störzonen, die kleiner als die Elemente sind, lokal zu reagieren.

Auch die Übergangselementierung in den an sich groben Bereichen

des h-Netzes ist nicht zufriedenstellend. Das hat auch seine numerische Entsprechung bei den p-Elementen, wenn größere Unterschiede bei den Ansatzgraden benachbarter Elemente zugelassen sind. Dies ist aber auch nicht zu erkennen.

### Mit der h-Adaptivität wurde das Problemgebiet automatisch erfaßt

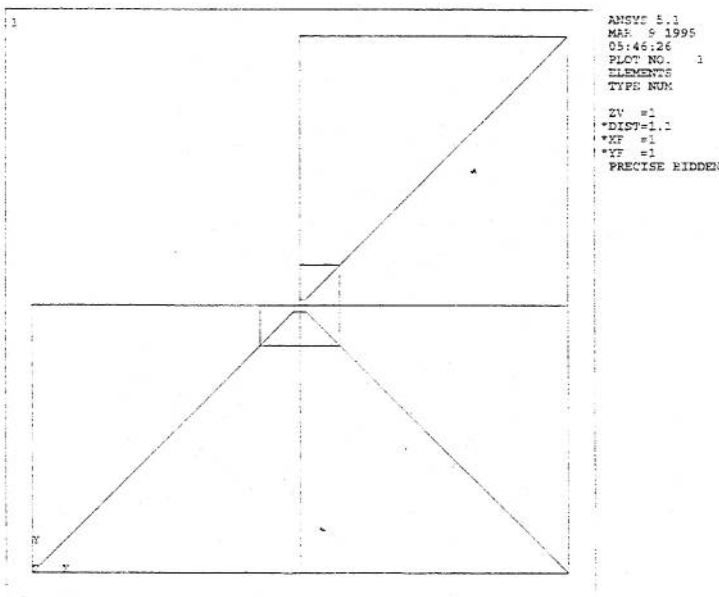
Es ist, wie oben beschrieben, zwar möglich, Elemente zu konstruieren, die an jeder Kante eine andere Ansatzordnung aufweisen, dadurch ergeben sich aber nicht unbedingt gleich gute Eigenschaften wie mit einer gleichmäßigen Diskretisierung. Entscheidend ist hier, daß das ei-

gentliche Problemgebiet nicht erfaßt wurde. Das gelingt mit der h-Adaptivität aber automatisch. In *Bild 4* ist die Verdichtung im Bereich der Spannungsspitze zu erkennen. Mit einem Siebtel der Elemente lassen sich gleich gute Ergebnisse wie mit dem gleichmäßig feinen Netz erreichen.

Aus den erwähnten und aus anderen Gründen läßt sich in den Fällen, in denen die Ansatzgraderhöhung sinnvoll ist, nur dann ein Optimum erreichen, wenn sie mit der lokalen Netzverdichtung kombiniert wird (hp-Adaptivität). Ein Ad-hoc-Verfahren sieht etwa so aus, daß zunächst mit niedrigem Ansatz eine adaptive h-Verfeinerung vorgenommen und dann die Polynomordnung erhöht wird. Dies läßt sich mit einem Mehrzweckprogramm realisieren, das nicht nur auf die p-Methode allein fixiert ist.

Für unser Beispiel wurde auch das durchgeführt. *Bild 5* zeigt das Netz. Eine Steigerung der Polynomordnung von 2 auf 3 ergibt eine Energieabweichung von 0,15 %; mit anderen Worten, die Ansatzgraderhöhung, also die p-Methode, hätte sich nicht gelohnt. Trotzdem zeigte der für die h-Verfeinerung verwendete Schätzer noch deutlich mehr als 5 % Fehler an, weil er lokale Effekte berücksichtigt. Für gerade diese Singularität, eine einspringende Ecke bei einer Scheibe, wurde herausgefunden, daß bei einem Progressionsfaktor für die Elementkantenlängen von 0,85 ein Optimum erreicht wird (*Bild 6*). Auf eine andere singuläre oder nicht-singuläre Störung trifft dies aber nicht zu. Bis-

*Bild 6: Darstellung eines optimalen Netzes für p-Adaptivität (Bild: CAD-FEM, Graßing bei München)*



thode bekannt, die richtige Elemententeilung zu finden. Die oben genannte hp-Methode ist nur ein Schritt in die richtige Richtung. Auch der Einsatz eines Expertensystems /11/ bedeutet nichts anderes, als daß Expertenwissen benötigt wird, um das geeignete Startnetz für eine p-adaptive Berechnung zu wählen. An diesem Beispiel läßt sich zweierlei erkennen: Erstens ist die Elemententeilung bei der p-Methode keineswegs beliebig. Vielmehr werden auch hier Kenntnisse über den Zusammenhang zwischen Tragverhalten und Vernetzung verlangt. Ferner muß das Netz der Lösung und damit der jeweiligen Belastung angepaßt werden. Zweitens ist die Energie kein Kriterium für die Konvergenz einzelner Größen.

Natürlich lassen sich solche Einzelwerte an bestimmten Stellen in die Konvergenzbetrachtungen einbeziehen. Aber welche? Dieses Beispiel weist an der einspringenden Ecke eine Singularität auf. Die Spannungen genau dort werden theoretisch unendlich und könnten daher nicht konvergieren. Wegen der Extrapolation von Stellen im Elementinnern her tun sie es bei größeren p-Elementen vielleicht doch, was dann aber wieder nichts aussagt. Nun sind Singularitäten nur ein Zeichen dafür, daß das idealisierte Modell von der Wirklichkeit abweicht. Vielleicht wird beispielsweise eine Ausrundung vernachlässigt. Dann könnte eine Spannung etwas abseits der Ecke auf Konvergenz abgeprüft werden, wo, hängt von der Ausrundung ab. Die Ausführungen zeigen, daß

die Methode beherrscht werden muß, um verlässliche Ergebnisse zu bekommen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß überhaupt kein Unterschied zwischen GEA und FEA besteht. p-Elemente sind Teil der FEA. Finite beschreibt die Tatsache, daß eine Struktur in eine Anzahl endlicher Bereiche aufgeteilt wird. Eine Vernetzung der Struktur muß in beiden Fällen vorgenommen werden. Die Ansatzfunktionen der Elemente sind entweder von kleiner Ordnung (h-Elemente) oder höherer Ordnung (p-Elemente). Schweiger in /12/: »Es besteht eigentlich keine Notwendigkeit, durch einen neuen Namen - GEM, GEA - ein neues Verfahren vorzutauschen.«

### **Die p-Methode wird als interessante Ergänzung zur h-Methode gesehen**

Die p-Methode ist eine interessante Spielart der Finite-Elemente-Analyse für einen begrenzten Anwendungsbereich, wenn sie als Ergänzung zur h-Methode verstanden wird. Wer sich mit den Eigenheiten auskennt, kann unter Umständen schneller eine brauchbare Lösung erreichen. Dazu wird jedoch eine gehörige Portion Fachwissen und Erfahrung benötigt. Die p-Methode ist nicht neu, die Gründe, weshalb sich Elemente mit geringem Ansatzgrad durchgesetzt haben, bestehen weiterhin fort. Die p-Methode ist nicht zuverlässiger als die h-Methode, gerade für den Gelegenheitsanwender gilt eher das Gegenteil.

Adaptive Verfahren sind hilfreich, sie können aber nicht das Gefühl für das Tragverhalten eines Systems, das der Berechner entwickeln muß, und auch nicht die Kontrollrechnung ersetzen.

#### **Literatur:**

/1/ Brent McKim. Why the Days of FEA are Numbered. Extract from Newsletter of the Shock and Vibration Information Analysis Centre, May 1994.

/2/ Manfred Schumacher. CAD alleine reicht nicht!. CAD/CAM, 4, 1994.

/3/ Manfred Schumacher. Turbopower - Optimierung-Software realisiert kürzere Entwicklungszeiten. Konstruktionspraxis, 9. September 1994.

/4/ Manfred Schumacher. Die GEM-Methode löst die bisherigen »Trial-and-error«-Modelle ab. Computerzeitung, 7. Februar 1994.

/5/ O.C. Zienkiewicz: The Finite Element Method. McGRAW-Hill, London, 1977.

/6/ A. Peano. Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending, Comp. Math. with Appl., 2, 1976.

/7/ Robinson: Questions to be Answered When Using p-Elements, Finite Element News, 4, August 1994.

/8/ W. Rust, E. Stein: 2D-Finite-Element Mesh Adaptations in Structural Mechanics, including Shell Analysis and Non-Linear Calculations, in Ladeveze/Zienkiewicz (Hrsg.): New Advances in Computational Structural Mechanics. Elsevier, 219-232, 1992.

/9/ J. Bellmann, E. Rank: Die p- und hp-Version der Finite-Elemente-Methode oder: Lönnen sich höherwertige Elemente?

/10/ O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, Int. J. Num. Meth. Eng., 2839-2853, 28, 1989.

/11/ I. Babuska, E. Rank. An Expert-System-like Feedback Approach in the hp-Version of the Finite Element Method, Finite Elements in Analysis and Design, 127-147, 3, 1987.

/12/ Willy Schweiger. Drei Varianten ergänzen sich. Beitrag im Computer-Graphik-Markt 1993/94, II/136-141, Dressler Verlag Heidelberg.



Bild 2:  
Scheibe mit einspringender Ecke  
System und Referenzlösung

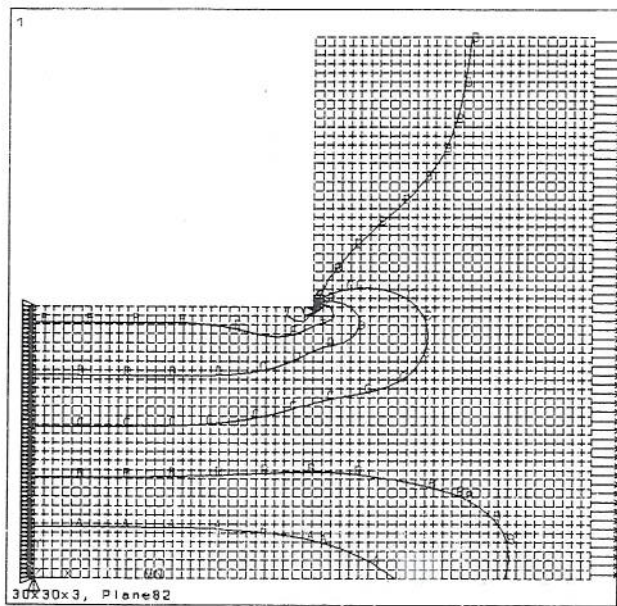


Bild 3:  
h-Verfeinerung nach Energie-  
kriterium

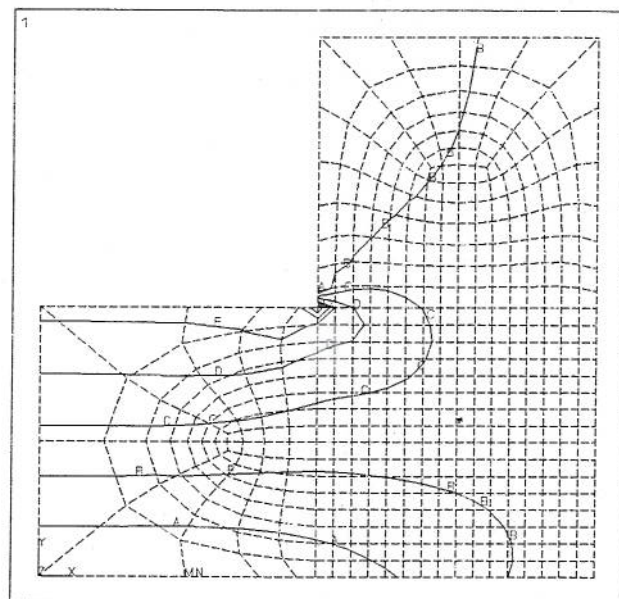


Bild 4:  
h-adaptive Lösung

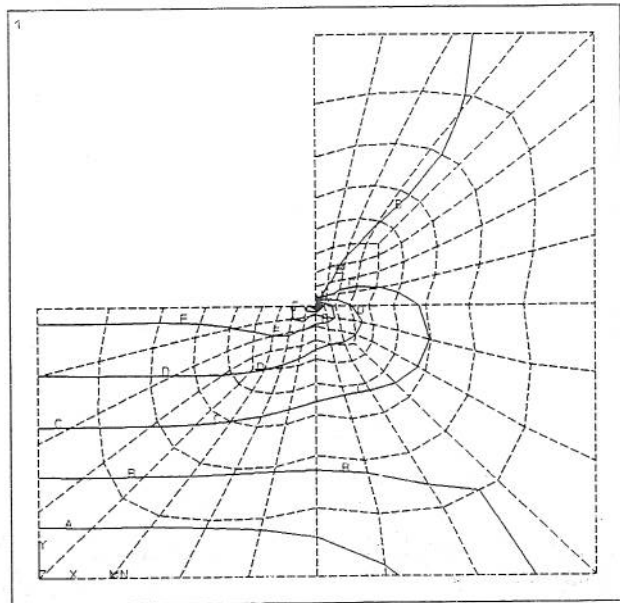


Bild 5:  
hp-adaptive Lösung

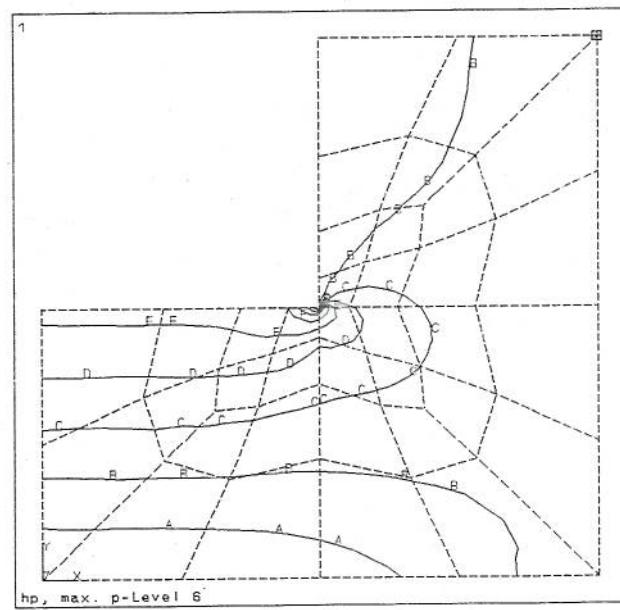


Bild 6:  
hp-adaptive Lösung mit  
theoretisch optimalem Netz

