

## 2 Grundgleichungen der Wärmeübertragung

### 2.1 Einleitung

Die wesentlichen physikalischen Effekte, die in technischen Problemen der Temperaturfeldberechnung auftreten, waren bereits in Abschnitt 1 genannt worden. Hier werden die Gleichungen dargestellt, mit denen diese Effekte beschrieben werden können. Mit dieser Darstellung soll die Basis zum Verständnis der folgenden Schritte geschaffen werden, aber auch die Verbindung zur Grundlagenphysik hergestellt werden. Eine Herleitung der Gleichungen erfolgt nicht, dies ist zum Verständnis der FEM-Anwendungen nicht erforderlich.

Die Grundlage der Temperaturfeldberechnungen ist der 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Nach diesem Hauptsatz kann bei physikalischen oder technischen Prozessen keine Energie verloren gehen, sondern nur ihre Erscheinungsform ändern. Für ein geschlossenes System (bei dem keine Materie ein- oder ausströmt) kann dieser 1. Hauptsatz dargestellt werden als

$$E_{th} + W = \Delta U + E_{kin} + \Delta R_{pot} \quad (2.1.1)$$

mit

$E_{th}$	thermische Arbeit
$W$	mechanische Arbeit
$\Delta U$	Änderung der inneren Energie
$\Delta E_{kin}$	Änderung der kinetischen Energie
$\Delta E_{pot}$	Änderung der potentiellen Energie

In den Anwendungen dieses Buches wird davon ausgegangen, dass keine mechanischen Verschiebungen auftreten und die berechneten Bauteile an dem Ort bleiben, den sie am Anfang der Analyse einnehmen. Dann können die mechanischen Größen in dieser Darstellung des 1. Hauptsatzes eliminiert werden

$$E_{th} = \Delta U \quad (2.1.2)$$

Daraus folgt, dass von außen zu- oder abgeführte thermische Arbeit zu einer Änderung der inneren Energie des Bauteils führt.

Wenn ein stationärer Zustand berechnet wird, tritt keine Änderung der Temperaturen im Bauteil und damit keine Änderung der inneren Energie auf. Dann ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz

$$E_{th} = 0 \quad (2.1.3)$$

das heißt, dass die zugeführte thermische Arbeit der abgeführten thermischen Arbeit gleich sein muss.

Wenn die zeitlichen Änderungen betrachtet werden, so ergibt sich aus (2.1.2), dass eine Zu- oder Abfuhr von thermischer Leistung bzw. ein zu- oder abgeführter Wärmestrom eine zeitliche Änderung der inneren Energie ergibt

$$Q = \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (2.1.4)$$

Wenn bei einer Temperaturfeldberechnung eines Bauteils die zeitlichen Änderungen berücksichtigt werden (transiente Berechnung) und alle von außen zu- oder abgeführten Wärmeströme summiert werden und diese Bilanz einen Restwert ergibt, so resultiert daraus nach (2.1.4) eine Änderung der inneren Energie des Bauteils. Für die hier betrachteten Festkörper kann die innere Energie dargestellt werden als

$$Q = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t} = \frac{\rho V c_p \Delta T}{\Delta t} \quad (2.1.5)$$

Bei der Berechnung eines stationären Zustandes ergibt sich aus (2.1.3)

$$Q = 0 \quad (2.1.6)$$

Daraus folgt, dass bei einer stationären Berechnung (keine zeitlichen Änderungen) die Summe der zu- und abgeführten Wärmeströme Null sein muss.

## 2.2 Wärmeleitung (Konduktion)

Die Wärmeleitung kann mit einer Gleichung abgebildet werden, die auf Fourier zurückgeht. Für stationäre Wärmeleitung ergibt sich eine quasiharmonische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_3 \frac{\partial T}{\partial z} = f_{(x,y,z)} \quad (2.2.1)$$

und bei instationären, zeitabhängigen Problemen eine parabolische Differentialgleichung (Diffusionsgleichung)

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda_3 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + f_{(x,y,z)} \quad (2.2.2)$$

Dabei bedeuten

$\lambda$	Material-Wärmeleitfähigkeit in der jeweiligen Raumrichtung
$c$	Material-Wärmekapazität ( $c_p \rho$ )
$T$	Temperatur
$x,y,z$	Länge
$t$	Zeit

Unter Verwendung des Nabla-Operators kann für den stationären Fall auch geschrieben werden

$$\Delta(\lambda \nabla T) = f_{(x,y,z)} \quad (2.2.3)$$

Wenn der besondere Fall vorliegt, dass die Wärmeleitfähigkeit im gesamten Berechnungsbereich gleichbleibend ist, ergibt sich hierfür auch

$$\lambda \nabla^2 T = f_{(x,y,z)} \quad (2.2.4)$$

Für stationäre Wärmeleitung kann auch häufig die Darstellung gefunden werden

$$\lambda \cdot A \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} k \right) = -q \dots \quad (2.2.5)$$

oder entsprechend für instationäre, zeitabhängige Aufgabenstellungen

$$\lambda \cdot A \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} k \right) = c \frac{\partial T}{\partial t} - q \dots \quad (2.2.6)$$

mit

$\lambda$	Material-Wärmeleitfähigkeit
$c$	Material-Wärmekapazität ( $c_p \rho$ )
$A$	Querschnittsfläche
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$x,y,z$	Länge
$i,j,k$	Komponenten des Einheitsvektors
$q'''$	Wärmeerzeugungsrate

Die Wärmeerzeugungsrate stellt im Volumen verteilte Wärmequellen oder -senken dar, hier also eine Wärmez- oder -abfuhr, bezogen auf das jeweilige Volumen.

Die hier auftretenden Größen sind wiederzuerkennen, wenn die Aufgabe nach der Methode der Finiten Elemente in ein Gleichungssystem umgewandelt wird. Diese Umwandlung wird in Teil II dieses Buches vorgestellt. In Matrixschreibweise ergibt sich dann für stationäre Aufgaben die Beziehung

$$[k_{th}] \cdot \{T\} = -\{Q\} \quad (2.2.7)$$

und für instationäre, zeitabhängige Aufgaben

$$\{c\} \cdot \{\dot{T}\} \cdot [k_{th}] \cdot \{T\} = -\{Q\} \quad (2.2.8)$$

mit

- $\{\dot{T}\}$  Vektor der 1. zeitlichen Ableitung der Temperaturen
- $\{T\}$  Vektor der Temperaturen
- $\{c\}$  Matrix der Wärmekapazität
- $[k_{th}]$  Matrix der Wärmeleitfähigkeit
- $\{Q\}$  Vektor der von außen zu- oder abgeführten Wärmeströme

Die vorher genannten Differentialgleichungen sind für infinitesimale Bereiche zutreffend und streng nach den Gesetzen der Physik aufgestellt worden. Bei der Umformung in ein Gleichungssystem wurde jeweils ein endlicher, örtlich abgegrenzter Bereich zugrundegelegt und Übergangsbedingungen zwischen diesen Bereichen berücksichtigt. Einen solchen abgegrenzten, "finiten" Bereich stellt jedes Element dar, aus dem unser Berechnungsmodell aufgebaut ist.

Material	Anhaltswert für $c_p$ [J / (kg K)]
Aluminium	896
Beton	880
Kupfer	383
Stahl	500

Tab. 2.2-1 Anhaltswerte für die spezifische Wärmekapazität  $c_p$

Jedes Element bietet einer Temperaturdifferenz an den Enden oder Ecken eine gewisse Leitfähigkeit. Diese Leitfähigkeit ist von der Wärmeleitfähigkeit des Materials und von der Geometrie des Elements abhängig. Wenn man sich auf einen 1-dimensionalen Fall beschränkt und anstelle der Differentialquotienten für eine bestimmte Länge L die Differenzen betrachtet, so ergibt sich unter Verwendung der Element-Leitfähigkeit k bzw. der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Materials, der Querschnittsfläche A und der Länge L für diesen Bauteilabschnitt

Material	Anhaltswert für $\lambda$ [W / (m K)]
Aluminium	230
Beton	0,8 ... 1,4
Kupfer	380
Stahl, austenitisch	16,5
Stahl, ferritisch	40

Tab. 2.2-2 Anhaltswerte für die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$

$$Q = -k(T_1 - T_2) = -\frac{\lambda \cdot A}{L}(T_1 - T_2) \quad (2.2.9)$$

In den folgenden Abschnitten wird konkret diese Element-Leitfähigkeit k für einige Elementtypen berechnet. Bei mehrdimensionalen Anwendungen ergibt sich eine Matrix von Zahlenwerten, die in Matrixschreibweise mit  $[k_{th}]$  bezeichnet wird. Im folgenden wird der Index weggelassen und die Leitfähigkeitsmatrix mit  $[k]$  angegeben.

Zur Erläuterung sei noch einmal klargestellt, dass der Vektor der von außen zu- oder abgeführten Wärmeströme  $\{Q\}$  in der Matrixschreibweise hier den Vektor im numerischen Sinne beschreibt. Wir werden bei der Finite-Element-Methode mit Elementen und Knoten arbeiten, die über das gesamte Berechnungsgebiet (das Modell) verteilt sind. Bei dieser Vorgehensweise können an jedem Knoten des Modells Wärmeströme zu- oder abgeführt werden. Auf diese Weise kann eine Erwärmung von außen durch Wärmeströme in die Randknoten, örtliche Wärmequellen durch Wärmeströme in einige innere Knoten oder eine flächige Abkühlung durch Wärmeströme an allen Knoten des Modells abgebildet werden. Wenn die Wärmestromwerte aller Knoten nacheinander aufgeschrieben und gespeichert werden, liegt eine Reihe von Werten vor, die den oben so bezeichneten Vektor der von außen zu- oder abgeführten Wärmemengen bildet.

### 2.3 Wärmeübergang (Konvektion)

In Abschnitt 1.5 wurde bereits dargestellt, dass hier nur die erzwungene Konvektion betrachtet wird. Hierbei liegt ein Wärmeübergang an den Rändern oder Oberflächen eines umströmten Körpers vor. Die Menge der zu- oder abgeführten Wärme ist hierbei im wesentlichen von der

Temperatur des Mediums der Umströmung und dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  abhängig, der die Strömungsgrenzschicht repräsentiert. Es ergibt sich damit

$$\alpha \cdot A \cdot (T_F - T_W) = Q \quad (2.3.1)$$

mit

$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient
A	Fläche
$T_F$	Temperatur im Fluid außerhalb der Grenzschicht
$T_W$	Wand-, Oberflächentemperatur
Q	Wärmestrom

In der FEM-Berechnung wird dieser Effekt am Rand des Modells angegeben und stellt damit im Wortsinne eine "Rand"bedingung dar. Aus den Daten der FEM-Berechnung ist die Fläche A (durch die Geometrie des FEM-Modells) und die Wandtemperatur  $T_W$  gegeben. Der Anwender muss also die Konvektion nur noch mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  und der Fluidtemperatur  $T_F$  beschreiben.

Die Lösung der FEM-Berechnung enthält die Wandtemperatur  $T_W$  sowie den Wärmestrom, der sich aus Gleichung (2.3.1) ergibt.

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ist im wesentlichen von der Dichte des umgebenden Mediums und der Strömungsgeschwindigkeit abhängig. Die Bereiche der technisch infrage kommende Werte (in Anlehnung an Cerbe, Hoffmann /3/, VDI-Wärmeatlas /10/ und verschiedene andere Literaturquellen) sind in der folgenden Tabelle angegeben. Diese Werte sind als **Anhaltswerte** zu verstehen.

Anwendungsfall (Geschwindigkeit $v$ in [m / s] )	Anhaltswert für $\alpha$ [W / (m <sup>2</sup> K)]
Luft in geschlossenen Räumen an der Innenseite der Wand	8
Luft an der Außenseite der Wand	23
Luft an der Außenseite der Wand bei Sturm bis zu	116
Luft, ruhend, senkrecht zu einer glatten Wand	3.5 ... 35
Luft, mäßig bewegt, senkrecht zu einer glatten Wand	23 ... 70
Luft, kräftig bewegt, senkrecht zu einer glatten Wand	68 ... 290
Luft, mäßig bewegt ( $v < 5$ m / s), längs einer glatten Wand	$5.7 + 4 v$
Luft, schnell bewegt ( $v > 5$ m / s), längs einer glatten Wand	$7.1 v^{0.78}$
Luft, mäßig bewegt ( $v < 5$ m / s), längs einer rauhen Wand	$6.2 + 4.2 v$
Luft, schnell bewegt ( $v > 5$ m / s), längs einer rauhen Wand	$7.5 v^{0.78}$
Wasser in Kesseln und Behältern	580 ... 2300
Strömendes Wasser in Rohren	2300 ... 4700
Siedendes Wasser in Rohren	4700 ... 7000
Kondensierender Wasserdampf	6000 ... 12000

Tab. 2.3-1 Anhaltswerte für den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$

Insbesondere durch einen Phasenwechsel des umgebenden Mediums an der Bauteilwand (Verdampfung, Filmkondensation, Tropfenkondensation) kann der Zahlenwert des Wärmeübergangskoeffizienten stark beeinflusst werden.

## 2.4 Wärmestrahlung

Die für die Wärmestrahlung maßgebende Gleichung, das Stefan-Boltzmann-Gesetz, fasst die physikalischen und geometrischen Einflüsse zusammen und beschreibt den durch Wärmestrahlung ausgetauschten Wärmestrom mit

$$A_i \cdot F_{ij} \cdot \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot (T_i^4 - T_j^4) = Q \quad (2.4.1)$$

mit

$A_i$	Fläche des Strahlers i
$F_{ij}$	Formfaktor zwischen Flächen i und j
$\varepsilon_i$	Emissionsgrad der Oberfläche i
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante, $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W / (m}^2 \text{ K}^4)$
$T_i$	Absolute Temperatur der Strahler-Oberfläche i
$T_j$	Absolute Temperatur der Empfänger-Oberfläche j
$Q$	Wärmestrom

Es ist zu beachten, dass die Temperaturen der Oberflächen als absolute Temperaturen zu berücksichtigen sind, d. h. sie müssen z. B. in Kelvin (K) oder Rankine (R), nicht jedoch in Celsius (°C) oder Fahrenheit (°F) eingesetzt werden. Der physikalische Einfluss ist durch die Beschaffenheit der Strahleroberflächen gegeben, er wird durch den dimensionslosen Wert des Emissionsgrades  $\varepsilon_i$  beschrieben. Die geometrischen Bedingungen zwischen Strahler und Empfänger sind in dem Formfaktor  $F_{ij}$  zusammengefasst. Dieser Formfaktor wird wesentlich beeinflusst durch die Orientierung (Neigung) beider Flächen zueinander sowie durch den Raumwinkel, den der Strahlungsempfänger vom Strahlungssender aus gesehen einnimmt.

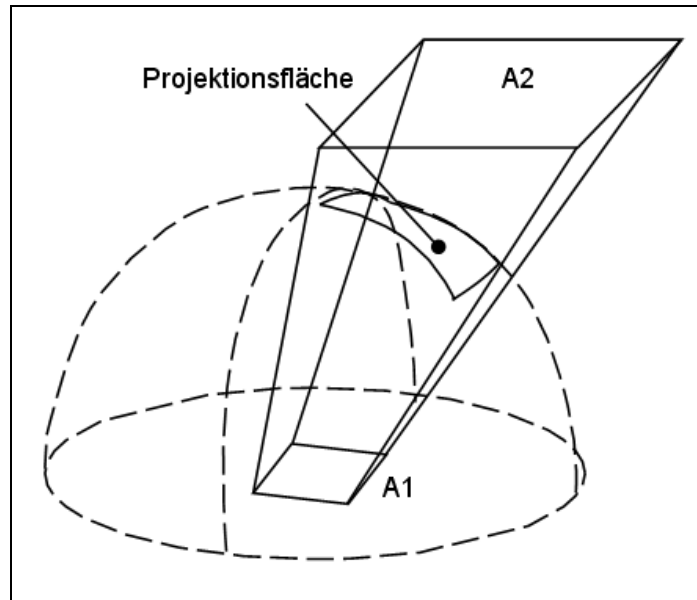


Abb. 2.4-1 Projektionsfläche von A2, bezogen auf die Strahlerfläche A1

In Abb. 2.4-1 ist für eine Strahlungsverbindung zwischen der Senderfläche A1 und der Empfänger- oder Zielfläche A2 dieser Raumwinkel erkennbar. Er ist vergleichbar mit der Größe der Projektionsfläche der Fläche A2 auf einer Kugeloberfläche um die Senderfläche A1. Der Raumwinkel wird in "Steradian" gemessen. Der Wärmestrom, der durch diese Strahlungsverbindung ausgetauscht wird, ist diesem Raumwinkel und der Strahlerfläche A1 proportional.

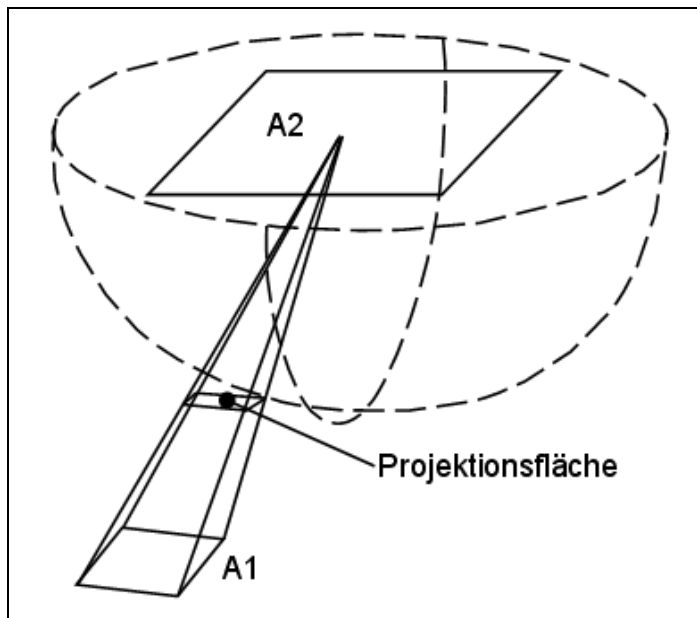


Abb. 2.4-2 Projektionsfläche von A1, bezogen auf die Strahlerfläche A2

Aus Wärmebilanzgründen muss sich für eine umgedrehte Betrachtung dieser Strahlungsverbindung der gleiche Wärmestrom ergeben. Dies ist nachvollziehbar anhand der Abb. 2.4-2. Dort ist der Raumwinkel geringer, erkennbar an der kleineren Projektionsfläche der Fläche A1 auf der Kugeloberfläche um die Senderfläche A2. Der Wärmestrom ist diesem Raumwinkel und der Strahlerfläche A2 proportional und ergibt sich gleich demjenigen der Anordnung von Abb. 2.4-1.

Der Formfaktor ist in praktischen Anwendungen nur schwer zu bestimmen. Hierzu sind im allgemeinen numerische Methoden sinnvoll. Für einfache Standardfälle sind in Hering/ Martin/

Stohrer /2/ Lösungen bereitgestellt. Die Abb. 2.4-3 zeigt für einige geometrische Konfigurationen den Strahlungsaustauschkoeffizienten  $C_{12}$ :

$$C_{12} = F_{12} \cdot \varepsilon_1 \cdot \sigma \tag{2.4.2}$$


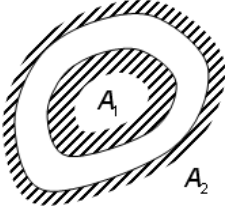
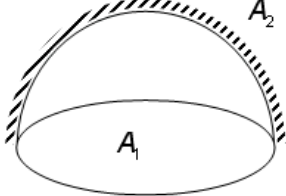
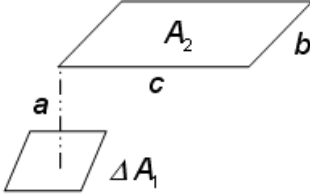
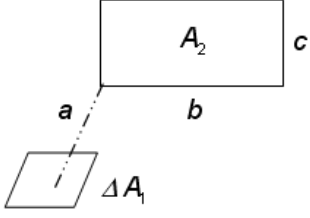
Geometrie	Strahlungsaustauschkoeffizient
	<p>parallele Flächen</p> $C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$
	<p>konvexe Fläche <math>A_1</math> von konkaver Fläche <math>A_2</math> umschlossen</p> $C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$
	<p>Halbraum <math>A_2</math> über ebener Fläche <math>A_1</math></p> $C_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma}{1 - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}$
	<p>Rechteckfläche <math>A_2</math> parallel zum Flächenelement <math>A_1</math></p> $C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{2\pi} \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \arctan \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)$
	<p>Rechteckfläche <math>A_2</math> senkrecht zum Flächenelement <math>A_1</math></p> $C_{12} = \sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{b}{a} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)$

Abb. 2.4-3 Strahlungsaustauschkoeffizienten (aus /2/)

## 2.5 Phasenübergang

Bei einem Phasenübergang nimmt ein Körper Energie auf oder gibt sie ab, ohne dabei wesentlich seine Temperatur zu verändern. Diese je nach Richtung der Änderung aufgenommene oder abgegebene Energie wird als latente Wärme  $H_{\text{Lat}}$  bezeichnet. In technischen Aufgabenstellungen ist ein solcher Phasenübergang vielfach ein Übergang zwischen dem festem und flüssigem Materialzustand. Es kann aber auch ein sonstiger Vorgang im Material sein, der endotherm (unter Aufnahme von thermischer Energie) oder exotherm (unter Abgabe von thermischer Energie) verläuft.

In der numerischen Berechnung erfolgt die Berücksichtigung des Phasenüberganges durch eine nichtlineare, von der Temperatur abhängige Funktion der Materialdaten. Mit einer solchen Funktion ist es möglich, die latente Wärme im Phasenwechselbereich zwischen Liquidus- und Solidustemperatur zu erfassen. Die Bezeichnungen der Solidus- und Liquidustemperatur werden zur Vereinfachung hier und in den folgenden Abschnitten durchgehend für die untere und obere Grenztemperatur des Phasenwechselbereiches verwendet.

Die latente Wärme kann entweder mit einer nichtlinearen Funktion der Enthalpie oder einer nichtlinearen Funktion der Wärmekapazität berücksichtigt werden. Zur Erläuterung beider Vorgehensweisen wird an die Definition der Enthalpie  $H$  eines Stoffes erinnert, die sich als Zustandsgröße zu

$$H = U + p \cdot V \quad (2.5.1)$$

ergibt (vergl. zum Beispiel Cerbe/Hoffmann /3/, S. 43 ff). Dabei sind

- $H$  die Enthalpie,
- $U$  die innere Energie,
- $p$  der Druck und
- $V$  das Volumen des Stoffes.

Wir beschränken uns im weiteren auf Zustandsänderungen, bei denen sich der Druck nicht ändert. Dies ist im allgemeinen bei festen Materialien oder auch meistens bei Flüssigkeiten der Fall.

Zur Klarstellung wird darauf hingewiesen, dass diese Überlegungen hinsichtlich der Zustandsänderungen bei gleichem Druck oder gleichem Volumen die Energiebilanz betreffen und damit die Vorgänge, die bei der Untersuchung der Temperaturverteilung in einem Bauteil zu berücksichtigen sind. Dies ist zu unterscheiden von einer strukturmechanischen Berechnung, bei der eine Temperaturverteilung zugrundegelegt wird und daraus thermische Dehnungen auftreten. Während diese thermisch induzierten Dehnungen in technischen Berechnungen immer eine signifikante Rolle bei der Beanspruchung spielen, sind Druck- und Volumenänderungen bei der Energiebilanz bei technischen Berechnungen von Bauteilen aus festen Stoffen vernachlässigbar.

Unter dieser Beschränkung der Zustandsänderungen ergibt sich bei einer Temperaturänderung ohne Phasenübergang die Änderung der Enthalpie nach

$$H_{(T_2)} - H_{(T_1)} = U_{(T_2)} - U_{(T_1)} \quad (2.5.2)$$

als Änderung der inneren Energie und damit zu

$$H_{(T_2)} - H_{(T_1)} = V \int_{T_1}^{T_2} \rho c_{pT} dT \quad (2.5.3)$$

beziehungsweise

$$H_{(T_2)} = H_{(T_1)} + \Delta H = H_{(T_1)} + V \int_{T_1}^{T_2} \rho c_{pT} dT \quad (2.5.4)$$

wobei

- $V$  das betrachtete Volumen,
- $c_p$  die für die Wärmespeicherung maßgebende Stoffgröße, die spezifische Wärme-

- kapazität, und
- $\rho$  die Dichte des Materials ist.

Bei einem Phasenwechsel ist zusätzlich die latente Wärme  $H_{Lat}$  zu berücksichtigen. Für ein Temperaturintervall von  $T_1$  bis  $T_2$ , das nun den Phasenwechselbereich zwischen  $T_S$  und  $T_L$  einschließt (mit  $T_1 < T_S < T_L < T_2$ ), gilt daher

$$H_{(T_2)} - H_{(T_1)} = V \int_{T_1}^{T_2} \rho c_{pT} dT + H_{Lat} \quad (2.5.5)$$

beziehungsweise

$$H_{(T_2)} = H_{(T_1)} + \Delta H = H_{(T_1)} + V \int_{T_1}^{T_2} \rho c_{pT} dT + H_{Lat} \quad (2.5.6)$$

In dieser Darstellung und in den Beispielen, die in Teil VI durchgeführt werden, wird der Phasenwechsel im Bereich des FEM-Modells untersucht. Die Materie, die dabei den Phasenwechsel erfährt, ist Bestandteil des Modells. Für diesen Materiebereich werden dann die Materialdaten eingegeben, die die latente Wärme enthalten, so dass das besondere Verhalten des Materials beim Durchlaufen dieses Temperaturbereiches berücksichtigt werden kann.

### 2.5.1 Enthalpiemodell

Bei der Verwendung einer nichtlinearen Funktion der Enthalpie wird die latente Wärme dadurch abgebildet, dass im Phasenwechselbereich zwischen der unteren Temperatur  $T_S$  und der oberen Temperatur  $T_L$  die Enthalpiefunktion mit einem stufenförmigen Verlauf definiert wird. Die Stufe ergibt sich im Phasenwechselbereich durch die latente Wärme gemäß

$$H_L = H_S + \Delta H_{L-S} = H_S + \Delta H + H_{Lat} \quad (2.5.1.1)$$

Bei der Temperaturänderung im Temperaturintervall  $T_S < T_L$  ergibt sich damit ein Anstieg der Enthalpie  $\Delta H_{L-S}$ , der gegenüber dem Enthalpieanstieg in den benachbarten Bereichen  $\Delta H$  um  $H_{Lat}$  erhöht ist. Anschaulich kann dieser Verlauf charakterisiert werden durch eine Funktion der Enthalpie über der Temperatur, die im Phasenwechsel-Temperaturbereich eine steile Stufe oder einen Sprung aufweist. Abb. 2.5-1 zeigt eine solche Funktion als Beispiel.

Bei der numerischen Lösung einer Aufgabe mit Phasenwechsel ist das Enthalpiemodell vorteilhaft, da der zeitliche Ablauf schrittweise gerechnet wird. Dies ergibt entsprechend eine Schrittfolge entlang der Temperaturachse. Auch bei relativ großen Schritten kann der Einfluss der latenten Wärme durch die Stufe in der Enthalpiefunktion mit Sicherheit eingearbeitet werden. Dadurch verringert sich der Rechenaufwand.

### 2.5.2 Nichtlineare Funktion der Wärmekapazität

Bei der Verwendung einer nichtlinearen Funktion der Wärmekapazität wird die latente Wärme  $H_{Lat}$  innerhalb des Integral-Ausdruckes berücksichtigt. Dann ergibt sich in den Grenzen des Intervalls zwischen der Solidustemperatur  $T_S$  und der Liquidustemperatur  $T_L$  die Enthalpieänderung als

$$\begin{aligned} K_L &= H_S + \Delta H_{L-S} \\ &= H_S + V \int_{T_S}^{T_L} c_{L-S(T)} dT \\ &= H_S + V \int_{T_S}^{T_L} (\rho c_{p(T)} + c^*) dT \end{aligned} \quad (2.5.2.1)$$

mit  $c_{L-S(T)} = \rho c_{p(T)} + c^*$



$$\text{und } H_{Lat} = \int_{T_s}^{T_L} c^* dT$$

Anschaulich kann diese Vorgehensweise charakterisiert werden durch eine Funktion der Wärmekapazität über der Temperatur  $c_{pL-S}$ , die im Phasenwechsel-Temperaturintervall gegenüber der Wärmekapazität  $c_p$  des Materials im benachbarten Temperaturbereich einen höheren Wert annimmt. Das Integral (der Flächeninhalt) dieses "Rechteckimpulses", der über die Kapazität des umgebenden Bereiches hinausragt, entspricht der latenten Wärme. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist in Abb. 2.5-2 gezeigt.

Bei der numerischen Lösung einer Aufgabe mit Phasenwechsel ist die nichtlineare Funktion der spezifischen Wärme unvorteilhaft, da bei einer Schrittfolge im Zeitbereich bzw. entsprechend einer Schrittfolge entlang der Temperaturachse die Schrittweite schärfer

Material	Anhaltswert für $H_{Lat}$ [J / kg]
Aluminium, schmelzen bei ca. 660°C	397 000
Eisen, schmelzen bei ca. 1535°C	277 000
Wasser, schmelzen bei ca. 0°C	333 000
Wasser, verdampfen bei ca. 100°C	2 256 000

begrenzt werden muss. Bei relativ großen Schritten kann das erhöhte Niveau des Funktionsverlaufes, das die latente Wärme repräsentiert, nur ungenau berücksichtigt werden oder im ungünstigen Fall auch übersprungen werden. Daher ist eine besondere Aufmerksamkeit der Wahl der Zeitschrittweite zu widmen. Im allgemeinen ist ein gegenüber dem Enthalpiemodell erhöhter Rechenaufwand erforderlich.

Tab. 2.5-1 Anhaltswerte für die latente Wärme  $H_{lat}$

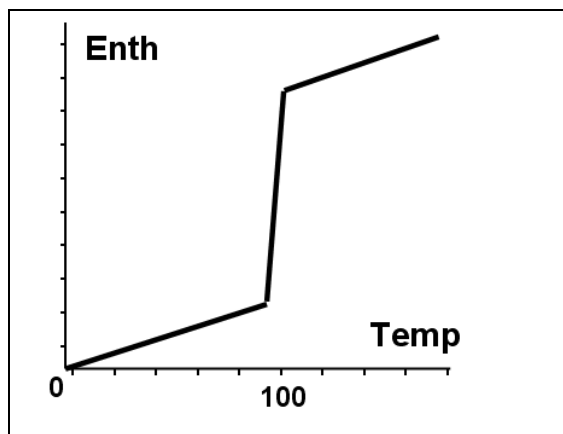


Abb. 2.5-1 Nichtlineare Funktion der Enthalpie bei Phasenwechsel

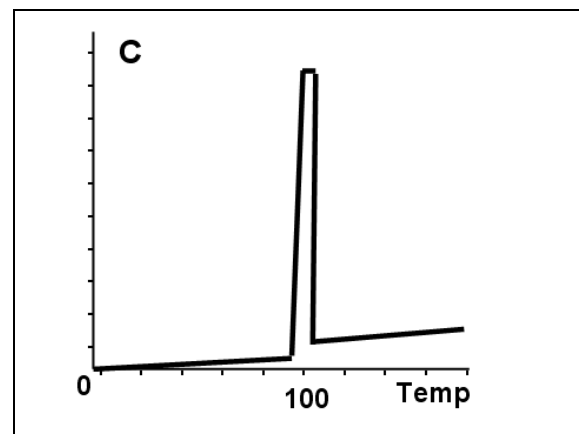


Abb. 2.5-2 Nichtlineare Funktion der Wärmekapazität bei Phasenwechsel