

# Grundlagen der FEM – Zeitintegration

In der vorliegenden Artikelreihe wollen wir die Grundlagen von Simulationsprogrammen untersuchen. Nachdem in den letzten Artikeln Methoden zur Orts-Diskretisierung (wie z.B. das Galerkin-, Ritz-, Trefftz-, oder das Finite-Differenzen-Verfahren) behandelt wurden, beschäftigen wir uns hier mit zeitabhängigen Differentialgleichungen. Die Zeitabhängigkeit wird typischerweise mit Finiten Differenzen-Verfahren diskretisiert. Hier werden die Unterschiede der impliziten oder expliziten Zeitintegration am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung dargestellt.

## Zeitintegration am Beispiel des Grillens

Da sich vom mathematischen Standpunkt aus die Zeitabhängigkeit einer Differentialgleichung nicht von der Ortsabhängigkeit unterscheidet, könnten zur Diskretisierung der Zeitabhängigkeit prinzipiell die gleichen Methoden angewandt werden wie zur Ortsdiskretisierung. Der Zeit kommt im Raum-Zeitkontinuum jedoch eine Sonderrolle zu (z.B. ist die zeitliche Entwicklung i. A. nur in einer Richtung möglich), daher geschieht die Zeitintegration meist nicht mit komplizierteren FE-Ansätzen sondern mittels finiter Differenzen.

Die Anwendung auf die Zeitintegration wollen wir am Beispiel des Grillens erläutern. Die zeitunabhängige Form der Wärmeleitungsgleichung hatten wir bereits in der letzten Ausgabe dieser Reihe kennengelernt. Hier interessiert uns nun nicht die Gleichgewichtslösung der Temperaturverteilung, die sich nach entsprechend langer Zeit einstellt und kulinarisch kein zufriedenstellendes Ergebnis liefert, sondern der zeitliche Verlauf der Temperatur im Fleisch.

Im Folgenden betrachten wir ein großes ("unendlich ausge dehntes") Steak von 1.5 cm Dicke und interessieren uns für die Temperaturverteilung im Inneren, d.h. den Temperaturverlauf von  $x=0\text{cm}$  bis  $x=1.5\text{cm}$ . Für das Material verwenden wir eine Temperaturleitfähigkeit von  $k=0.0013\text{cm}^2/\text{s}$  (das ist der Quotient aus Wärmeleitfähigkeit  $\lambda=0.5\text{W}/(\text{Km})$  und der spezifischen Wärme  $c=3936\text{J}/(\text{kgK})$  mal die Dichte  $\rho=1040\text{kg}/\text{m}^3$ .) Die (eindimensionale) Wärmeleitungsgleichung lautet dafür

$$-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} = c \rho \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

In diesem Artikel wird ein stark vereinfachtes Modell mit konstanten Stoffparametern verwendet und auf die Temperaturabhängigkeit der Parameter verzichtet. Zur Definition der Randbedingungen nehmen wir eine feste Temperatur ( $\vartheta=200^\circ\text{C}$ ) auf der Unterseite (die Temperatur des Grills) und auf der Oberseite des Steaks ( $\vartheta=30^\circ\text{C}$ , die Temperatur der umgebenden Luft) an und betrachten ein von der jeweiligen (zeitabhängigen) Temperaturdifferenz abhängigen Wärmefluss

zwischen Fleisch und Umgebung mit einem angenommenen Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha=19\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Mathematisch ist dies eine gemischte Randbedingung, die vom Funktionswert und der Ableitung abhängt:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(x=0,t)}{\partial x} = \alpha (\vartheta(x=0,t) - 200)$$

(Wärmefluss von der Unterseite des Steaks zum Grill),

$$\lambda \frac{\partial \vartheta(x=1.5,t)}{\partial x} = \alpha (\vartheta(x=1.5,t) - 30)$$

(Wärmefluss an die umgebende Luft)

$$\vartheta(x,t=0) = 6$$

(Anfangstemperatur des Steaks aus dem Kühlschrank)

Da unser Steak direkt vom Kühlschrank auf den Grill gelegt wurde, beträgt die Anfangstemperatur des Steaks  $6^\circ\text{C}$ .

Zur Berechnung der Temperaturverteilung im Steak gehen wir von dem (semidiskreten) Gleichungssystem aus, das wir im letzten Artikel mittels zentraler Differenzen fanden:

$$\begin{aligned} \frac{k}{h^2} (-\vartheta(x_{n-1},t) + 2\vartheta(x_n,t) - \vartheta(x_{n+1},t)) &= \frac{d\vartheta(x_n,t)}{dt} \\ -k \frac{\vartheta(x_1,t) - \vartheta(x_0,t)}{h} &= \frac{\alpha}{c\rho} (\vartheta(x_0,t) - 200), \\ k \frac{\vartheta(x_N,t) - \vartheta(x_{N-1},t)}{h} &= \frac{\alpha}{c\rho} (\vartheta(x_N,t) - 30), \end{aligned} \tag{2}$$

und diskretisieren die Zeitabhängigkeit mittels finiter Differenzen.

## Explizite Zeitintegration

Die einfachste Näherung der zeitlichen Ableitung erhält man mit Vorwärtsdifferenzen, d.h. durch Anwendung des Euler-Verfahrens:

$$\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (\vartheta(x,t + \Delta t) - \vartheta(x,t)) \tag{3a}$$

wobei  $\Delta t$  die Zeitschrittweite, also die Differenz von  $t^{i+1}$  und  $t^i$  angibt. Setzen wir diese Approximation in Gleichung (2) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{k}{h^2} (-\vartheta(x_{n-1},t^i) + 2\vartheta(x_n,t^i) - \vartheta(x_{n+1},t^i)) \\ = \frac{1}{\Delta t} (\vartheta(x_n,t^{i+1}) - \vartheta(x_n,t^i)) \end{aligned} \tag{4}$$

Das Euler-Verfahren liefert uns also die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t^{i+1}$ , die nur von Temperaturen zu  $t^i$  abhängt, d.h.

$$\begin{aligned} \vartheta(x_n,t^{i+1}) = \\ \frac{\Delta t \cdot k}{h^2} (-\vartheta(x_{n-1},t^i) + 2 \cdot \vartheta(x_n,t^i) - \vartheta(x_{n+1},t^i)) + \vartheta(x_n,t^i) \end{aligned}$$

Wie in Bild 1 skizziert, kann die zeitliche Entwicklung von  $t^i$  nach  $t^{i+1}$  direkt mittels der (bekannten) Temperaturverteilung angegeben werden. Daher wird das Euler-Verfahren als explizites Verfahren bezeichnet. Der Preis für diese einfache Zeitentwicklung ist allerdings, dass bei expliziten Verfahren starke Einschränkungen an die Zeitschrittweite  $\Delta t$  gelten. Wird die

Schrittweite zu groß gewählt, wächst die Lösung stark an oder oszilliert wie in Bild 2 zu sehen ist. Man kann zeigen, dass das Verfahren für Zeitschritte  $\Delta t \leq h^2/2k$  stabil ist.

**Implizite Zeitintegration**

Einschränkungen an die Zeitschrittweite entfallen, wenn die Ableitung mittels Rückwärtsdifferenzen gebildet wird. Dazu betrachten wir zum Zeitpunkt  $t^{i+1}$  die zeitliche Entwicklung ausgehend von  $t^i$ :

$$\frac{\partial \vartheta(x, t + \Delta t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (\vartheta(x, t + \Delta t) - \vartheta(x, t)) \tag{3b}$$

Das Pendant zu Gleichung (4) lautet so:

$$\frac{k}{h^2} (-\vartheta(x_{n-1}, t^{i+1}) + 2\vartheta(x_n, t^{i+1}) - \vartheta(x_{n+1}, t^{i+1})) = \frac{1}{\Delta t} (\vartheta(x_n, t^{i+1}) - \vartheta(x_n, t^i)) \tag{5}$$

Im Gegensatz zum expliziten Euler-Verfahren hängt nun die Temperaturverteilung bei  $t^{i+1}$  sowohl von bekannten Werten als auch von unbekannt Werten ab. Deshalb wird dieses Verfahren auch implizites Euler-Verfahren genannt. Zur Zeitentwicklung müssen wir nun folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\vartheta(x_n, t^{i+1}) = \frac{\Delta t \cdot k}{h^2} (-\vartheta(x_{n-1}, t^{i+1}) + 2\vartheta(x_n, t^{i+1}) - \vartheta(x_{n+1}, t^{i+1})) + \vartheta(x_n, t^i)$$

Die so ermittelte Temperaturverteilung im Steak ist in Bild 3 dargestellt.

Anders als bei expliziten Verfahren gelten bei solchen impliziten

Verfahren keine Einschränkungen an die Schrittweite. Vielmehr kann man zeigen, dass das implizite Verfahren hier für alle  $\Delta t$  stabil ist. Während explizite Verfahren zunächst verlockend erscheinen, da die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt direkt aus der vorherigen Lösung angegeben werden kann, ist es bei impliziten Verfahren oft möglich mit sehr viel größeren Zeitschritten zu rechnen.

Die beiden vorgestellten Verfahren stellen die einfachsten Methoden zur Zeitintegration dar. Selbstverständlich sind noch viele weitere (kompliziertere) Verfahren gebräuchlich, wie z. B. das Crank-Nicholson-Verfahren, das eine Kombination beider Verfahren darstellt, oder Mehrschrittverfahren, die Informationen zu mehr als zwei Zeitschritten betrachten. Es sei noch angemerkt, dass die hier vorgestellte Methode zur Zeitintegration unabhängig von der gewählten Ortsdiskretisierung (z.B. finite Elemente, finite Volumen) ist.

Das Beispiel wurde als Mathcad Arbeitsblätter aufbereitet und steht unter [www.inutech.de/Dokumente](http://www.inutech.de/Dokumente) zur Verfügung. Eine HTML-Version der Arbeitsblätter finden sie unter [www.inutech.de/FEM](http://www.inutech.de/FEM).

Literatur:

- H. P. Langtangen, *Computational Partial Differential Equations*, Springer.
- Ch.Großmann, H.-G. Ross, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner

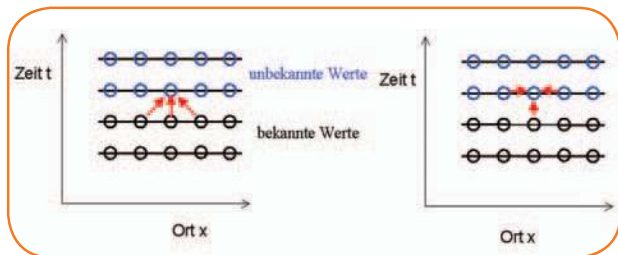


Bild 1: Schematische Darstellung zum expliziten (links) und impliziten (rückwärtigen) Eulerverfahren. Während bei ersterem nur bekannte Werte benutzt werden, fließen bei dem impliziten Verfahren sowohl bekannte als auch unbekannte Werte in die Berechnung ein.

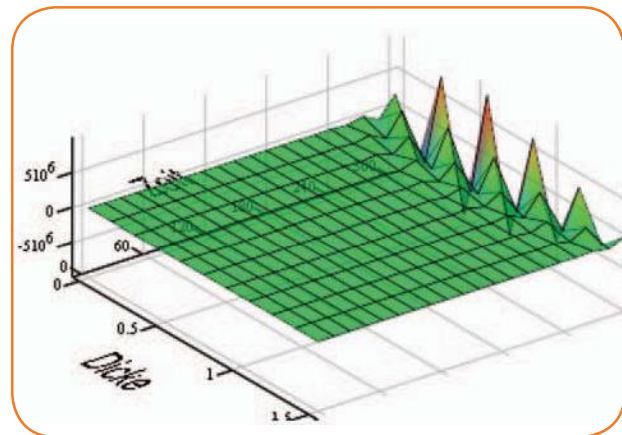


Bild 2: Lösung der Wärmeleitung mittels des expliziten Eulerverfahrens bei einer Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.926 h^2 / (2k)$ : Die Temperaturverteilung im Steak oszilliert und ist keine physikalisch sinnvolle Lösung.

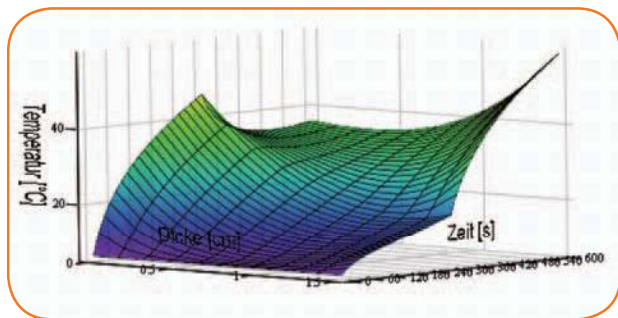


Bild 3: Mittels des impliziten Euler-Verfahrens berechnete Temperaturverteilung im Steak: Das Fleisch wurde nach 5 min gewendet (d.h. die Randbedingungen für  $x_0$  und  $x_N$  wurden vertauscht).

**Autoren**

Dr. Andreas Krug, Dr. Wigand Rathmann  
 inuTech GmbH  
 E-Mail: [wigand.rathmann@inutech.de](mailto:wigand.rathmann@inutech.de)  
[www.inutech.de](http://www.inutech.de)